МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Затверджено
на засіданні кафедри комп’ютерних технологій
протокол № ______ від “____”______________
Тираж 100 прим.

Вимогам, що ставляться до
навчально-методичних видань,
відповідає

Зав. кафедри __________________А.А.Тимченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з курсу
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ і МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

для студентів спеціальностей 7.080401, 7.080403, 7.090501
всіх форм навчання

Весь цифровий і фактичний матеріал та бібліографічні
Відомості перевірено. Зауваження рецензента враховано

Зав. кафедри ______________________________
Укладач: _________________________________
Відповідальний редактор____________________
Рецензент ________________________________

Черкаси ЧІТІ 2000 рік

Сучасний стан комп'ютерних наук у значній мірі визначається використанням методів теорії ймовірностей і математичної статистики, що дозволяють оцінювати характеристики складних систем з урахуванням різноманітних випадкових чинників при визначенні точності, швидкодії, надійності та ін. Відповідно до статистичних законів, майбутній стан визначається не однозначно, а лише з деякою ймовірністю, що є об'єктивною мірою можливості реалізації закладених у минулому тенденцій до змін. Математична статистика опирається на теорію ймовірностей і її завдання полягає у відновленні за обмеженими даними із визначеним ступенем достовірності характеристик, властивих всьому мислимому наборові даних, що описують досліджувані явища. В останні десятиліття від теорії ймовірностей 'відбрунькувались' такі галузі науки, як теорія інформації, теорія надійності й ін. Всі вони застосовуються при проектуванні обчислювальної техніки, обробці інформації і водночас допускають активне її використання для вирішення своїх задач, що визначає необхідність оволодіння методами теорії ймовірностей і математичної статистики як інструментом системного аналізу та математичним апаратом для прогнозування явищ і процесів.

Кожне практичне заняття проводиться на визначену тему і складається з п'яти розділів: короткі теоретичні відомості, приклад розв'язку задач, завдання для аудиторної, самостійної та домашньої роботи. Студент, який успішно вирішує аудиторні та домашні завдання може поглибити свої практичні навички, розв'язуючи завдання підвищеної складності із розділу самостійної роботи.

Крім традиційного матеріалу у десятому практичному занятті розміщені умови задач з теорії нечітких множин, питання взаємозв'язку якої із теорією ймовірностей включені в програму курсу та теорії інформації, що безумовно буде корисним для студентів, які спеціалізуються в галузі криптографії, криптозахисту та передачі інформації по каналам зв'язку.

<u>Практичне заняття №1.</u>

1. Класичне та аксіоматичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

1. Теоретичні відомості. *Класичне означення ймовірності*. Ймовірність події А обчислюють як відношення кількості результатів дослідів, що сприяють події А до загальної їх кількості. *Достовірною* називається подія, яка в результаті досліду неодмінно відбувається. Протилежною до достовірної події є *неможлива* подія, тобто така подія, яка в даному досліді взагалі не може відбутися. *Практично неможливою* є подія, ймовірність якої не в точності дорівнює нулю, але дуже близька до нуля. *Практично до-*

стовірною є подія, ймовірність якої в точності не дорівнює одиниці, але дуже близька до одиниці. Кажуть, що декілька подій в даному досліді утворюють *повну групу*, якщо в результаті досліду неодмінно повинна з'явитись одна з них. Декілька подій в даному досліді називаються *несумісними*, якщо ніякі дві з них не можуть з'явитися разом.

Урнова схема. Нехай в урні знаходиться n чорних та m білих кульок. З урни навмання дістають k кульок, $0 < k < n + m$. Ймовірність того, що серед них l білих кульок ($l \le k$) дорівнює $P(A) = \dfrac{C_m^l C_n^{k-l}}{C_{n+m}^k}$, де $C_a^b = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$ - кількість сполучень із a по b.

Аксіоматичне означення ймовірності (за О.М. Колмогоровим). Нехай проводиться дослід із випадковим результатом. Множину всіх можливих результатів досліду позначимо Ω. Кожен її елемент $\omega \in \Omega$ називають *елементарною подією*, а всю множину Ω - *простором елементарних подій*. Будь-яка подія А є деякою підмножиною множини Ω: $A \subseteq \Omega$.

1. Кожній випадковій події $A \subseteq \Omega$ ставиться у відповідність невід'ємне число $P(A)$, яке називають ймовірністю.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Для попарно несумісних подій A_i, $i = \overline{1,n}$ $P(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Наслідки. 1) Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.
2) Для будь-якої події А $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, де $\overline{A}$ - протилежна подія.
3) Для будь-якої події А $0 \le P(A) \le 1$.

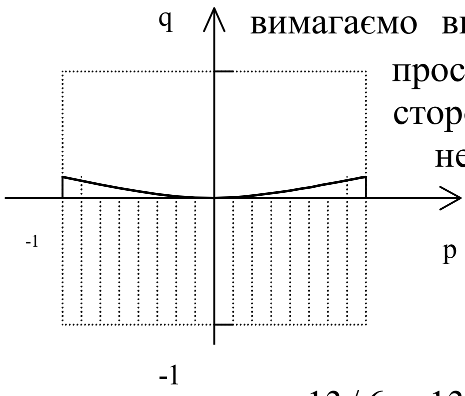
Геометричні ймовірності. Нехай на площині є деяка область Ω і в ній міститься інша область А. Необхідно знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання в Ω попаде в А. Ймовірність попадання точки в будь-яку частину області Ω пропорційна мірі (mes) цієї частини (довжині, площі, об'єму і т.д.) і не залежить від її розміщення та форми: $P = \dfrac{mes(A)}{mes(\Omega)}$.

2. Приклади розв'язку задач. Задача 1. Нехай в урні знаходиться 10 кульок білого кольору і 20 чорного. Навмання вийнято без повернення 6 кульок. Яка ймовірність події А = {кульок різного кольору вийнято порівну}?

Розв'язок. Згідно формули класичної ймовірності $P(A) = \dfrac{m_A}{n}$. Кількість способів витягнути 6 кульок із 30 (кількість усіх кульок в урні) - $n = C_{30}^6$. Кількість способів витягнути по 3 кульки різного кольору $m_A = C_{10}^3 \cdot C_{20}^3$. Таким чином, $P(A) = \dfrac{C_{10}^3 \cdot C_{20}^3}{C_{30}^6} = 0{,}038398$.

Задача 2. Дві точки вибираються навмання із відрізка [-1;1]. Нехай p і q - координати цих точок. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ буде мати дійсні корені.

Розв'язок. Для того, щоб рівняння мало дійсні корені, вимагаємо виконання нерівності $p^2 - 4q \geq 0$. Зобразимо простір елементарних подій Ω (прямокутник із стороною 2) і область, що визначається вказаною нерівністю (під параболою). Оскільки площа прямокутника дорівнює $mes(\Omega) = 4$, а площа криволінійної трапеції $mes(A) =$



$$= 2 + \int_{-1}^{1} \frac{p^2}{4} dp = 2 + \frac{p^3}{12}\Big|_{-1}^{1} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6},$$ то

має мо $P(A) = \frac{13/6}{4} = \frac{13}{24}$.

4. Задачі для аудиторного розв'язування

1.1. Гральний кубик кидають 6 раз. Знайти ймовірність того, що кожен раз випадатиме різна кількість очок, кожного разу випадатиме шістка.

1.1. Яка ймовірність витягнути із колоди карт валета?

1.2. В урні 10 білих і 20 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що серед 7 витягнутих кульок буде 3 білих.

1.3. Є колода з 36 карт. Знайти ймовірність того, що: а) верхня і нижня карта тузи; б) зверху колоди лежать туз, король і дама у вказаному порядку.

1.4. Яка ймовірність вгадати 3, 4, 5 і 6 номерів у спортлото 6 із 40?

1.5. Шифр складається із шести елементів, де перші два – букви латинського алфавіту, а інші чотири – цифри. Визначити кількість можливих варіантів кодів.

1.6. Двоє студентів домовились зустрітися між 15 та 16 годинами дня, причому домовились чекати один іншого не більше 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч не відбудеться.

1.7. В квадрат із стороною 5 см. кинута навмання точка. Яка ймовірність того, що точка впаде на відстані від центра квадрата не більшій 2 см?

1.8. В середині квадрата із стороною 8 см. знаходиться рівносторонній трикутник, площа якого втричі менша площі квадрата. Знайти ймовірність того, що кинута навмання в квадрат точка попаде в трикутник.

5. Задачі для домашнього розв'язування

1.11. Гральний кубик кидають 4 рази. Знайти ймовірність того, що: а) кожен раз випадатиме непарна кількість очок; б) перші два рази випадатиме парна кількість очок, а інші три – непарна.

1.12. Скільки слів можна утворити із слова "інженер", переставляючи букви?

1.13. Є колода із 52 карт. Знайти ймовірність того, що перші 13 карт однієї масті.

1.14. В урні 5 білих, 15 чорних та 30 синіх кульок. Знайти ймовірність того, що серед 9 витягнутих кульок по 3 різного кольору.

1.15. Фірма – провайдер встановила, що кожний пароль для доступу в мережу Internet повинен складатися із 10 символів. В паролі обов'язково повинні бути присутні чотири цифри, по три великих і малих літери латинського алфавіту. Скільки комбінацій повинен перебрати користувач Internet, якщо він забув свій пароль?

1.16. Скільки різних телефонних номерів може бути набрано в місті, якщо відомо, що всі номери шестизначні і перша цифра парна?

1.17. В коло вписаний трикутник. Знайти ймовірність того, що кинута навмання в коло точка попаде в трикутник.

1.18. Яка ймовірність того, що дев'ять пасажирів буде розсаджено: а) у три вагони по три чоловіки у кожному; б) чотири чоловіки в один вагон, три у другий і два у третій?

1.19. Коло вписане в рівносторонній трикутник із стороною 8 см. Яка ймовірність того, що кинута навмання в трикутник точка попаде в коло?

1.20. Всередині еліпса з півосями 15 і 10 см розміщене коло радіусом 4 см. Яка ймовірність того, що кинута навмання в еліпс точка попаде в коло?

6. Задачі підвищеної складності

1.21. Гральний кубик підкидають три рази. Яка ймовірність того, що ні разу не випаде трійка?

1.22. Площина розграфлена квадратною сіткою. Довжина сторони квадрата 7 см. На площину кидають навмання коло радіусом 2 см. Яка ймовірність того, що коло не перетне ні однієї із сторін квадратів?

1.23. Яка ймовірність того, що із трьох відрізків довжиною x, y, z можна побудувати трикутник?

1.24. Квадрат вписаний в рівносторонній трикутник із стороною 20 см. Яка ймовірність того, що кинута навмання в трикутник точка попаде в квадрат?

1.25. Два рівних по силі противники грають матч із m партій в шахи. Кожна партія закінчується виграшем, або програшем одного із учасників.

Всі результати матчу рівноймовірні. Знайти ймовірність того, що другий гравець виграє рівно m партій ($m \le n$).

1.26. Група, що складається із 10 чоловік, займає місця з однієї сторони прямокутного столу. Яка ймовірність того, що дві визначених особи будуть сидіти поряд?

1.27. Розв'язати задачу 1.26 в припущенні, що стіл круглий.

1.28. З урни, що містить кульки з номерами $1,2,\ldots m$, k раз ($k \le n$) виймають кульку і кожен раз повертається назад. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих кульок утворять спадаючу послідовність.

1.29. Із множини $\Theta = \{1,2,...,n\}$ вибирають два числа. Яка ймовірність того, що друге число менше першого, якщо вибір здійснюється: а) з поверненням; б) без повернення.

1.30. Значення a і b рівноможливі в квадраті $|a| \le 1, |b| \le 1$. Знайти ймовірності наступних подій: A={корені квадратного тричлена $x^2 + 2ax + b$ дійсні}, B={корені квадратного тричлена $x^2 + 2ax + b$ додатні}.

Практичне заняття №2.

Теореми додавання та множення ймовірностей. Умовні ймовірності.

1. Теоретичні відомості *Умовною ймовірністю* події A при умові, що відбулася подія B, називається величина P(A/B)=P(AB)/P(B) (P(B)≠0). Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої події.

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженій на умовну ймовірність другої при наявності першої: P(AB)=P(A)P(B/A).

Для *незалежних* подій P(AB)=P(A)P(B).

Теорема додавання ймовірностей. Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей подій мінус ймовірність їх добутку: P(A+B)=P(A)+ +P(B)-P(AB). Для *несумісних* подій P(A+B)=P(A)+P(B).

2. Приклади розв'язку задач. *Задача 1*. Кидають гральний кубик. Яка ймовірність події A={випаде непарна кількість очок}?

Розв'язок. Подія A дорівнює сумі несумісних подій A_i={випаде i очок, $i \in \{1,3,5\}$}. Відомо, що $P(A_i) = 1/6$. Тоді за теоремою додавання ймовірностей $P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \ = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

Задача 2. Є два технічні пристрої, які працюють незалежно. Ймовірність виходу першого пристрою з ладу протягом доби дорівнює 0,3, другого – 0,4. Знайти ймовірність події A={протягом доби з ладу вийде хоча б один пристрій}.

<u>Розв'язок</u>. Розглянемо протилежну до події A подію $\overline{A}$={протягом доби з ладу не вийде ні один пристрій} і події B_i={протягом доби з ладу не вийде і-й пристрій, $i=\overline{1,2}$ }. Тоді за формулою ймовірності протилежної подій та теоремою множення ймовірностей одержимо $P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(B_1)\times$ $\times P(B_2)=1-0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}58$.

3. Задачі для аудиторного розв'язування

2.1. В урні 10 білих, 20 чорних і 30 синіх кульок. Дістають навмання три кульки. Знайти ймовірність того, що кульки всі синього кольору.

2.2. В умовах задачі 2.1 знайти ймовірність того, що всі кульки різного кольору.

2.3. В першій урні 5 білих та 10 чорних кульок. В другій урні 12 білих та 10 чорних кульок. З урн дістають по три кульки. Знайти ймовірність того, що серед 6 витягнутих кульок 3 білих.

2.4. В умовах задачі 2.3 знайти ймовірність того, що всі кульки одного кольору.

2.5. Ймовірність виходу з ладу на протязі доби технічного пристрою (ТП) 0,1. Знайти ймовірність того, що ТП не вийде з ладу протягом трьох діб.

2.6. В умовах задачі 2.5 знайти ймовірність того, що ТП вийде з ладу на третю добу.

2.7. Три ТП незалежно один від іншого за добу виходять з ладу з ймовірностями, відповідно, 0,1, 0,2, 0,3. Знайти ймовірність того, що за добу вийдуть з ладу три ТП.

2.8. В умовах задачі 2.7 знайти ймовірність того, що з ладу вийдуть 2 ТП.

2.9. Ймовірність вибити 10 очок стрільцем дорівнює 0,5, 9 очок – 0,7, 8, або менше очок – 0,9. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець виб'є не менше 9 очок.

2.10. На автоматичній лінії працює три датчики. Для кожного датчика ймовірність того, що він в даний момент часу включений дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент включено хоча б два датчики.

4. Задачі для домашнього розв'язування

2.11. В урні 15 білих, 20 чорних і 25 синіх кульок. Дістають навмання 3 кульки. Знайти ймовірність того, що дві кульки з них одного кольору.

2.12. В умовах задачі 2.11. знайти ймовірність того, що дві кульки білого кольору і одна чорного.

2.13. Чотири ТП незалежно один від іншого за добу виходять з ладу з ймовірностями, відповідно, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Знайти ймовірність того, що з ладу вийде один ТП.

2.14. В умовах задачі 2.13 знайти ймовірність того, що з ладу вийдуть перший і другий, або другий і третій ТП.

2.15. В партії з 20 пристроїв 15 є сертифікованими. Знайти ймовірність того, що серед двох, вибраних навмання, пристроїв хоча б один сертифікований.

2.16. В умовах задачі 2.15 знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання 5 пристроїв 3 сертифікованих.

2.17. На підприємстві виготовляють 98% стандартних мікросхем, з яких 90% потім сертифікуються. Знайти ймовірність того, що взята навмання мікросхема сертифікована.

2.18. Знайти ймовірність того, що серед трьох кинутих гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на двох.

2.19. Ймовірність того, що справним є перший комп'ютер, дорівнює $7/8$, другий - $8/9$, третій - $5/6$. Визначити ймовірність того, що справними є хоча б два комп'ютери.

2.20. З повного набору кісток доміно навмання беруть дві. Яка ймовірність того, що одну можна прикласти до другої?

5. Задачі підвищеної складності

2.21. Серед 30 ТП 20 сертифіковані. Знайти ймовірність того, що серед 3 вибраних пристроїв всі сертифіковані.

2.22. Знайти ймовірність того, що серед трьох кинутих гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на одній.

2.23. Ймовірність того, що ТП не відмовить до моменту часу t_1 дорівнює 0,9, а ймовірність того, що він не відмовить до моменту часу $t_2\ (t_2 > t_1)$, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ТП, який не відмовив до моменту часу t_1, не відмовить і до моменту часу t_2.

2.24. Довести, що незалежні і не неможливі дві події обов'язково сумісні.

2.25. На шахову дошку ставлять навмання два слони – білий та чорний. Яка ймовірність того, що слони не поб'ють один іншого при умові, що білий слон попаде на одне із крайніх полів дошки?

2.26. Із урни, що містить 4 чорних і 6 білих кульок, навмання і послідовно дістають по одній кульці до появи білої кульки. Знайти ймовірність того, що необхідно буде діставати четверту кульку, якщо вибірка проводиться: а) з поверненням; б) без повернення.

2.27. Тільки один із 10 ключів підходить до даних дверей. Знайти ймовірність того, що прийдеться випробувати рівно 5 ключів, що відкрити двері.

2.28. По каналу зв'язку, що складається із передавача, ретранслятора і приймача, передаються два сигнали: одиниця і нуль. Внаслідок дії завад сигнали можуть спотворюватися. На дільниці передавач-ретранслятор одиниця переходить в одиницю з ймовірністю 0,8 і в нуль з ймовірністю – 0,2; нуль переходить в нуль з ймовірністю 0,7 і в одиницю з ймовірністю 0,3. На дільниці ретранслятор-приймач ймовірності вказаних подій, відповідно, рівні 0,9, 0,1, 0,8, 0,2. Визначити ймовірність події А={кодова комбінація 01, послана передавачем, прийнята без спотворень}.

2.29. Секретар написала 10 ділових листів, вклала їх в конверти і написала адреси випадковим чином. Яка ймовірність того, що хоча б один лист дійде за призначенням?

2.30. Стріляють із зенітної гармати по повітряній цілі. Попадання при окремих пострілах незалежні і мають ймовірність 0,7. Якщо снаряд попав в ціль, то вона знешкоджується з ймовірністю 0,8. Бойовий запас гармати 30 снарядів. Стріляють до знешкодження цілі, або до використання всього боєзапасу. Знайти ймовірності наступних подій: А={не весь боєкомплект буде використаний}, В={залишаться невикористаними не менше 20 снарядів}.

Практичне заняття №3.
Формула повної ймовірності та формула Байєса

1. Теоретичні відомості. *Формула повної ймовірності*. Нехай необхідно провести дослід, про умови якого можна зробити n гіпотез, що виключають одна іншу, $H_1, H_{2,\dots,}H_n$ $(H_iH_j = \varnothing \text{ } при \text{ } i \neq j)$. Ймовірності гіпотез відомі і рівні $P(H_1), P(H_2),\dots \dots, P(H_n)$. Подія А може з'явитися тільки з однією з гіпотез. Задані умовні ймовірності події А при кожній із гіпотез $P(A/H_1), P(A/H_2),\dots, P(A/H_n)$. Тоді $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$.

Формула Байєса. До досліду про його умови можна було зробити ряд гіпотез $H_1, H_{2,\dots,}H_n$, несумісних, які утворюють повну групу: $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $H_iH_j = \varnothing \text{ } при \text{ } i \neq j$. Ймовірності гіпотез (апріорні) до досліду задані і рівні $P(H_1), P(H_2),\dots, P(H_n)$; $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$. Дослід проведений і в його результаті з'явилась подія А. З врахуванням цього факту необхідно знайти післядослідні (апостеріорні) ймовірності гіпотез при умові, що дослід дав

результат А: $P(H_1/A), P(H_2/A),..., P(H_n/A)$. Маємо $P(H_i/A) =$
$$= \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, i = \overline{1,n} .$$

2. Приклади розв'язку задач. *<u>Задача 1</u>*. Два підприємства виробляють однотипні деталі. Перше підприємство дає 10% браку, друге - 15% . Для контролю відібрано 20 деталей з першого підприємства і 30 – з другого. Деталі змішані в одну партію і з неї навмання вибирають одну деталь. Яка ймовірність того, що вона бракована?

<u>Розв'язок</u>. Подія А={відібрана деталь бракована}. Гіпотези H_i={деталь вироблена на і-му підприємстві}, $i = \overline{1,2}$. Ймовірності гіпотез: $P(H_1) =$ $= \frac{n_1}{n_1+n_2} = \frac{2}{5}$, $P(H_2) = \frac{n_2}{n_1+n_2} = \frac{3}{5}$. Умовні ймовірності визначені умовою задачі: $P(A/H_1) = 0{,}1$, $P(A/H_2) = 0{,}15$. Тоді за формулою повної ймовірності $P(A) = \frac{n_1}{n_1+n_2} \cdot 0{,}1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \cdot 0{,}15 = 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}13$.

<u>Задача 2</u>. По каналу зв'язку передають три повідомлення. Ймовірності одержання повідомлень адресатами рівні, відповідно, 0,8, 0,9, 0,6. Яка ймовірність того, що друге повідомлення адресатом не отримано, якщо отримані два повідомлення?

<u>Розв'язок</u>. Нехай подія А={отримано два повідомлення з трьох}. Гіпотези H_i={і-повідомлення не отримано, $i = \overline{1,3}$}. Ймовірності гіпотез рівні: $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}1$, $P(H_3) = 0{,}4$. Події А/H_i={отримані два повідомлення при умові, що і-повідомлення не отримане },$i = \overline{1,3}$. Ймовірності цих подій рівні: $P(A/H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}108$, $P(A/H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = \ = 0{,}048$, $P(A/H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}288$. За формулою Байєса апостеріорна ймовірність
$$P(H_2/A) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}048}{0{,}2 \cdot 0{,}108 + 0{,}1 \cdot 0{,}048 + 0{,}4 \cdot 0{,}288} = 0{,}034 .$$

3. Задачі для аудиторного розв'язування

3.1. Є три однакові ящики. В першому ящикові 3 білих і 5 чорних кульок, в другому – 5 білих і 8 чорних, в третьому – 8 білих і 4 чорних. Навмання вибирають ящик і дістають дві кульки. Знайти ймовірність того, що ці кульки: а) білі; б) чорні.

3.2. Технічний пристрій на протязі доби працює 50% часу у першому режимі, 20% у другому, 30% у третьому. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) пристрою при роботі у першому режимі 0,8, у другому – 0,9, у третьому – 0,7. Знайти повну надійність приладу.

3.3. Є дві партії однорідних виробів: перша складається з 20 виробів, серед яких 20% з дефектами, в другій – 30 виробів, з яких 5 з дефектами. Навмання беруть з першої партії 3 вироби, з другої – 4 і змішують. Із одержаних семи виробів випадковим чином беруть два. Знайти ймовірність того, що: а) вони без дефектів; б) обидва вироби з дефектами; с) один з виробів з дефектами.

3.4. Повідомлення може передаватися по одному із 24 каналів зв’язку, що знаходяться в різних станах: 10 каналів у відмінному, 8 - в доброму, 6 – в посередньому. Ймовірність правильної передачі повідомлення для різного виду каналів, відповідно, дорівнює 0,9, 0,8, 0,7. Для підвищення достовірності повідомлення передається по одному і тому ж каналу зв’язку, який вибирається навмання, два рази. Знайти ймовірність того, що: а) два рази повідомлення буде передано правильно; б)обидва рази повідомлення буде передано неправильно; в)один раз повідомлення буде передано правильно.

3.5. У першому ящику є 30 деталей, з яких 20 стандартних, у другому, відповідно, 10 і 6. Навмання взята деталь із випадковим чином вибраного ящика виявилась стандартною. Яка ймовірність, що деталь була взята з першого ящика?

3.6. На склад підприємства надходять деталі із трьох цехів. Перший цех відправив 150 деталей, другий – 200 і третій –300. Перший і другий цехи дають по 3% браку, третій – 1%. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь є бракованою. Яка ймовірність того, що вона надійшла із другого цеху?

3.7. Перший колектив програмістів розробив 80% модулів програмного проекту, другий – 20%. 10% модулів, розроблених першим колективом, і 20% модулів, розроблених другим колективом, містять функції виводу інформації у зовнішній файл. Навмання взятий файл не містить функцій виводу. Яка ймовірність того, що він створений першим колективом?

3.8. В ящик, що містить 4 одинакові деталі поклали стандартну деталь, а потім навмання витягли одну деталь. Знайти ймовірність того, що витягли стандартну деталь, якщо рівноймовірні всі припущення про число стандартних деталей, що спочатку знаходилися в ящику.

2. Задачі для домашнього розв’язування

3.9. Є три однакові ящики. В першому ящикові 6 білих і 7 чорних кульок, в другому – 15 білих і 10 чорних, в третьому – 10 білих і 5 чорних. Навмання вибирають ящик і дістають дві кульки. Знайти ймовірність того, що: а) ці кульки білі; б)кульки різного кольору.

3.10. Повідомлення може передаватися по одному із 100 каналів зв'язку, що знаходяться в різних станах: 30 каналів у відмінному, 30 - в доброму, 40 – в посередньому. Ймовірність правильної передачі повідомлення для різного виду каналів, відповідно, дорівнює 0,95, 0,85, 0,75. Для підвищення достовірності повідомлення передається по одному і тому ж каналу зв'язку, який вибирається навмання, два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз повідомлення буде передано правильно.

3.11. Є три ящики; в першому 5 білих кульок і 2 чорних, в другому – 7 білих і 4 чорних, в третьому – 8 білих і 4 чорних. Навмання вибирають урну і дістають з неї кульку. Вона чорна. Знайти післядослідні (апостеріорні) ймовірності того, що кулька з 1-го, 2-го, 3-го ящика.

3.12. В партії технічних пристроїв є 20 виробів першого підприємства, 30 – другого, 40 – третього. Відомо, що ймовірність дефекту для пристроїв першого підприємства 0,1, другого – 0,15, третього – 0,25. Якщо пристрій з дефектом, то він не проходить випробовування. Взятий навмання з партії пристрій випробовування не пройшов. Знайти ймовірність того, що він виготовлений на 1-му, 2-му, 3-му підприємстві.

3.13. До досліду про його умови можна було зробити три гіпотези з ймовірностями, відповідно, 0,6, 0,3, 0,1. В результаті досліду з'явилась подія А, яка неможлива при першій гіпотезі і достовірна при другій та третій гіпотезі. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

3.14. Розслідуються причини поломки пристрою, про які зроблені три гіпотези. Згідно статистики, ймовірності гіпотез 0,4, 0,1, 0,5. Огляд пристрою показав, що в результаті поломки відбулася подія А={відмова автоматизованої системи контролю}. Умовні ймовірності події А при тих же гіпотезах рівні, відповідно, 0,3, 0,5, 0,2. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

3.15. За об'єктом ведеться спостереження. Є гіпотези, що він може з ймовірністю 0,3 функціонувати і з ймовірністю 0,7 не функціонувати. Існує два джерела інформації; перше повідомляє, що об'єкт не функціонує, друге, що функціонує. Перше джерело дає правильну інформацію з ймовірністю 0,9, другий – з ймовірністю 0,8. На основі аналізу даних знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

3.16. Технічний пристрій складається з трьох вузлів. Пристрій працює, коли працюють всі вузли. Надійності вузлів відомі і рівні, відповідно, 0,8, 0,7, 0,6. Вузли відмовляють незалежно один від іншого. Через деякий час встановили, що пристрій несправний. Знайти з врахуванням цього ймовірності гіпотез: H_1={не працює перший вузол}, H_2={не працює другий вузол}, H_3={не працюють два вузли}, H_4={не працюють три вузли}, H_5={всі вузли працюють}, H_6={не працюють перший і третій вузли}.

3.17. По мішені незалежно стріляють два стрільці, роблячи кожен по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця 0,8, для другого – 0,6. В мішень влучила одна куля. Яка ймовірність того, що влучний постріл зробив перший стрілець.

3. Задачі підвищеної складності

3.18. Вісім кульок, серед яких 3 білих і 5 чорних, розподілені по двом урнам. Навмання вибирається урна, а з неї одна кулька. Як потрібно розподілити кульки по урнах, щоб ймовірність події A={витягнена кулька біла} була б максимальною?

3.19. Для пошуку вірусу на вінчестері використовують n антівірусних програми, кожна з яких незалежно від інших знаходить вірус з ймовірністю p. Після аналізу файлової системи вінчестер був поділений на дві області. В першій області вірус може бути з ймовірністю 0,8, в другому – з ймовірністю 0,2. Як розподілити n антівірусних програм по двох областях, що ймовірність виявлення вірусу була максимальною?

3.20. Однотипові пристрої випускаються трьома заводами у співвідношенні 20:30:50, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно рівні 0,2, 0,1, 0,15. Прилад, що був куплений, виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він був зроблений на другому заводі?

3.21. По каналу зв'язку передається цифровий текст, що містить лише три цифри 1,2,3, які можуть з'являтися в тексті з рівними ймовірностями. Кожна цифра, що передається, із-за наявності завад приймається правильно з ймовірністю 0,6 і з ймовірністю 0,2 приймається за будь-яку іншу цифру. Знайти ймовірність того, що було передано 321, якщо прийнято 123.

3.22. Методом тестування шукають несправність в арифметичному пристрої обчислювальної машини. Можна вважати, що є 5 шансів із 6, що несправність зосереджена в одному із 8 мікропроцесорів, з рівними ймовірностями в будь-якому з них. Були випробувані 7 із цих мікропроцесорів, але несправність не знайдена. Яка ймовірність знайти несправність в останньому з 8 процесорів?

3.23. В першій урні 50 білих і 50 чорних кульки, в другій – 30 білих і 60 чорних кульки. Із першої урни переклали в другу урну одну кульку, а потім з другої урни витягли навмання одну кульку. Яка ймовірність того, що витягнена кулька раніше знаходилася в першій урні, якщо відомо, що вона чорна?

3.24. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність попадання при одному пострілі.

Практичне заняття № 4.

4. Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин.

1. Теоретичні відомості. *Законом розподілу* випадкової величини називається правило (таблиця, функція), яке дозволяє знаходити ймовірності подій, пов'язаних із випадковою величиною. *Рядом розподілу* випадкової величини X називається таблиця, в верхньому рядку якої перераховані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини, а в нижньому – ймовірності цих значень.

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що вона прийме значення менше, ніж задане x: F(x)=P{X<x}. Властивості функції розподілу: 1. F(x) – неспадна функція свого аргументу. 2. $F(-\infty)=0$. 3. $F(+\infty)=1$.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих її значень на ймовірності цих значень: $MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. *Дисперсією* дискретної випадкової величини X є математичне сподівання квадрата відповідної центрованої випадкової величини: $DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-MX)^2 p_i$.

Випадкова величина X має *біноміальний розподіл*, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…,n, а відповідні ймовірності: $P_m=P\{X=m\}=$ $=C_n^m p^m q^{n-m}$, де 0<p<1; q=1-p; m=0,1,2,…,n.

Випадкова величина X має *розподіл Пуассона*, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…, а відповідні ймовірності: $P_m=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}\quad (m=0,1,2,...)$.

Випадкова величина X має *геометричний розподіл*, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…, а ймовірності цих значень: $P_m=q^m p$, де 0<p<1; q=1-p; m=0,1,2,…

Випадкова величина X має *гіпергеометричний розподіл* з параметрами a, b, n, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…,a мають ймовірності: $P_m = P\{X = m\} = (C_a^m C_b^{n-m})/C_{a+b}^n \quad (m = 0,1,2,...,a)$.

Твірною функцією для випадкової величини X називається функція вигляду: $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, де z- довільний параметр $(0 < z \le 1)$. Для твірної функції справедливі наступні *співвідношення*: 1. $\varphi(1) = 1$. 2. $MX = \varphi'(1)$. 3. $DX = \varphi'(1) + \varphi''(1) - (\varphi'(1))^2$.

2. Приклади розв'язку задач. _Задача 1_. По каналу зв'язку передається два повідомлення. Кожне з них незалежно від іншого спотворюється з ймовірністю 0,2. Випадкова величина X – число спотворених повідомлень. Побудувати ряд розподілу X, знайти математичне сподівання, дисперсію.

Розв'язок. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом і може приймати значення 0,1,2. $P\{X = 0\} = C_2^0 p^0 q^2 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$. $P\{X = 1\} = C_2^1 p^1 q^1 = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$. $P\{X = 2\} = C_2^2 p^2 q^0 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.

Маємо ряд розподілу

X	0	1	2
p	0,64	0,32	0,08

Математичне сподівання $MX = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}64 + 1 \cdot 0{,}32 + 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}48$.

Дисперсія $DX = \sum_{i=1}^{3} (x_i - MX)^2 p_i = (0 - 0{,}48)^2 \cdot 0{,}64 + (1 - 0{,}48)^2 \cdot 0{,}32 +$
$+ (2 - 0{,}48)^2 \cdot 0{,}08 = 0{,}419$.

Задача 2. На автоматичну телефонну станцію надходить потік викликів з інтенсивністю $\lambda = 0{,}5$(викл./хв.). Знайти ймовірність події A={за три хвилини прийде хоча б один виклик.}

Розв'язок. Випадкова величина X – кількість викликів за три хвилини має розподіл Пуассона з параметром $a = \lambda \cdot \tau = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$. Розглянемо протилежну до події A подію $\overline{A}$={за три хвилини не надійде жодного виклику}.

Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-1{,}5} = 1 - 0{,}223 = 0{,}777.$

3. Задачі для аудиторного розв'язування

4.1. Знайти математичне сподівання, дисперсію і побудувати графік функції розподілу випадкової величини X

x_i	1	3	5	7	9
p_i	1/5	1/5	1/25	4/25	2/5

4.2. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкового числа попадань мячем в корзину, якщо ймовірність попадання мячем в корзину при одному кидку p=0.3.

4.3. По каналу зв'язку передається 6 повідомлень, кожне з яких незалежно від інших спотворюється з ймовірністю 0,2. Випадкова величина X – число спотворених повідомлень. Побудувати її ряд розподілу, знайти математичне сподівання та дисперсію.

4.4. Випадкова величина X приймає два можливі значення x_1 i x_2, причому $(x_1 < x_2)$ з ймовірностями відповідно p_1 i p_2. Знайти x_1 i x_2, якщо $p_2 = 0{,}9;\ MX = 1{,}7;\ \sigma(x) = 0{,}9.$

4.5. Технічний пристрій складається із 6 незалежно працюючих елементів. Ймовірності відмови кожного з елементів за час T однакові і рівні p=0,2. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовили хоча б 3 елементи.

4.6. Середнє число викликів на АТС в хвилину дорівнює 200. Знайти ймовірності наступних подій: А={за три секунди на АТС не надійде жодного виклику}, В={за три секунди на АТС надійде менше трьох викликів}; С={за одну секунду на АТС надійде рівно три виклики}, Д={за дві секунди на АТС надійде не менше двох викликів}.

4.7. Із урни, що містить n білих і m чорних кульок витягують навмання кульки до тих пір, поки не з‘явиться біла кулька. Знайти математичне сподівання числа витягнутих чорних кульок і його дисперсію, якщо кожну кульку повертають в урну.

4.8. Ймовірність виготовлення бракованого технічного пристрою дорівнює 0,002. Серед скількох технічних пристроїв, відібраних випадковим чином, можна з ймовірністю 0,95 очікувати відсутності бракованих?

4.9. Для контролю надійшла партія деталей. Відомо, що 5% всіх деталей не задовольняють стандарту. Скільки потрібно випробувати деталей, щоб з ймовірністю не менше 0,95 виявити хоча б одну нестандартну деталь.

4.10. Випадкова величина X може приймати цілі додатні значення з ймовірностями, що спадають в геометричній прогресії. Вибрати перший член та знаменник прогресії так, щоб математичне сподівання випадкової величини X було б рівне 10, і обчислити при цій умові ймовірність P{X<11}.

4. Задачі для домашнього розв'язування

4.11. Знайти математичне сподівання, дисперсію і побудувати графік функції розподілу випадкової величини X

x_i	3	4	5	6	8
p_i	1/2	1/8	1/8	1/8	1/8

4.12. Проводиться три незалежних досліди, в кожному з яких подія А з‘являється з ймовірністю 0,8. Випадкова величина Х - число появи події А в трьох дослідах. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини Х. Знайти її математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення і третій центральний момент.

4.13. По каналу зв’язку передаються 3 повідомлення, кожне з яких незалежно від інших спотворюється: перше з ймовірністю 0,2, друге – з ймовірністю 0,3, третє – з ймовірністю 0,4. Побудувати ряд розподілу випадкової величини Х – кількість спотворених повідомлень.

4.14. Технічний пристрій складається із 100 елементів, кожен з яких незалежно від інших виходить з ладу за час T з ймовірністю $p=5\cdot 10^{-3}$. Знайти ймовірності наступних подій: А={за час T відмовить рівно три елементи}, В={за час T відмовить хоча б один елемент}, С={за час T відмовить не більше 3 елементів}, Д={за час T не відмовить ні один елемент}, Е={за час T відмовлять рівно два елементи}, К={за час T відмовлять не більше двох елементів}.

4.15. Серед деталей 0,3% бракованих. Яка ймовірність того, що серед 4000 взятих навмання деталей 10 бракованих?

4.16. Автоматична станція одержує за добу в середньому 1000 викликів. Яка ймовірність того, що за дану хвилину вона отримає точно 10 викликів?

4.17. Ймовірність вибрати бракований пристрій дорівнює 1/10. Вибрано 40 пристроїв. Випадкова величина Х – число бракованих пристроїв. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Х.

4.18. На автоматичну телефонну станцію поступають виклики з інтенсивністю $\lambda = 2$ (викл./хв.). Знайти ймовірність того, що за три хвилини: а) не надійде ні одного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде два виклики; г) надійде три виклики; д) надійде не менше двох викликів.

4.19. При кожному повороті радіолокатора об’єкт виявляють з ймовірністю $p = 0{,}3$. Знайти: а) математичне сподівання і дисперсію кількості поворотів радіолокатора, які буде виконано без виявлення об’єкта;
б) математичне сподівання та дисперсію числа поворотів радіолокатора, які необхідно виконати до виявлення об’єкта (враховуючи і той, при якому об’єкт буде виявлено).

4.20. При роботі комп’ютера час від часу виникають збої. Середнє число збоїв за добу дорівнює 1,5. Знайти ймовірності наступних події:
А – за дві доби не буде ні одного збою;
В – на протязі тижня відбудеться хоча б один збій;

C – за тиждень роботи відбудеться не менше трьох збоїв.

5. Задачі підвищеної складності

4.21. Два стрільці незалежно один від іншого стріляють кожний по своїй мішені, роблячи незалежно один від іншого по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця p_1, для другого p_2. Розглядаються дві випадкові величини: X_1 – число попадань першого стрільця, X_2 - число попадань другого стрільця і їх різниця $Z=X_1-X_2$. Побудувати ряд розподілу випадкової величини Z і знайти її математичне сподівання та дисперсію.

4.22. Випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з математичним сподіванням a=3. Побудувати многокутник розподілу і функцію розподілу випадкової величини X. Знайти: а) ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше, ніж її математичне сподівання; б) ймовірність того, що величина X прийме додатнє значення.

4.23. Гральний кубик підкидають до першої появи шестірки. Нехай X – число підкидань. Знайти розподіл випадкової величини X, обчислити середнє значення і дисперсію випадкової величини X. Яка ймовірність того, що буде зроблено не більше трьох підкидань?

4.24. Гральний кубик підкидають до r-ї появи шестірки. Знайти математичне сподівання числа підкидань.

4.25. Розподіл дискретної випадкової величини X визначається формулою $P\{X=k\}=\dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}$, $k=1,2,3,...$ Знайти математичне сподівання випадкової величини X.

4.26. Перший гравець кидає 3, а другий 2 однакових монети. Виграє і одержує всі 5 монет той, у якого випаде більша кількість гербів. У випадку нічиєї гра повторюється до одержання визначеного результату. Яке математичне сподівання виграшу для кожного із гравців?

4.27. Ймовірність появи герба при кожному із п’яти кидань монети дорівнює 0,5. Скласти ряд розподілу відношення числа X появи герба до числа Y появи решки.

4.28. Проводиться три незалежних досліди, в кожному з яких з рівною ймовірністю може бути одержане будь-яку ціле число від 0 до 9. Побудувати ряд розподілу суми одержаних чисел.

4.29. Сигнали на включення приладів подаються через кожні 3 секунди. Час від моменту передачі сигналу до включення приладу 15 сек. Подача сигналу припиняється зразу ж після того, як включиться хоча б один прилад. Знайти ряд розподілу для випадкового числа поданих сигналів, якщо ймовірність включення для кожного приладу дорівнює 0,5.

4.30. (Задача Банаха). Інженер носить з собою дві коробки сірників. Кожен раз, коли йому потрібен сірник, він навмання бере одну із коробок. Колись наступить такий момент, що витягнута коробка виявиться порожньою.

а) Знайти ймовірність того, що друга коробка містить r сірників, припускаючи, що спочатку кожна з коробок містила по $N \geq r$ сірників.

б) Знайти ймовірність того, що в момент, коли вперше одна із коробок виявилась порожньою, інша містила r сірників.

в) Знайти ймовірність того, що відсутність сірників буде вперше виявлено не в тій коробці, яка вперше спорожніла.

<u>Практичне заняття № 5.</u>

Закони розподілу та числові характеристики неперервних випадкових величин.

1. Теоретичні відомості. *Щільністю розподілу* неперервної випадкової величини Х в точці х називається похідна її функції розподілу: $f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$. *Властивості* функції розподілу: 1. $f(x) \geq 0$. 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. *Математичне сподівання* величини Х: $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, *дисперсія* - $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx$.

Випадкова величина Х має *рівномірний розподіл*, якщо її щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$ *при* $x \in (a,b)$.

Випадкова величина Х має *показниковий розподіл*, якщо її щільність розподілу $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ *при* $x > 0$.

2. Приклади розв'язку задач. *<u>Задача 1</u>*. Дана функція розподілу $F(x) = \{0, \text{ при } x < 0, (a+1)x^2, \text{ при } 0 \leq x \leq 2, 1, \text{ при } x > 2\}$ випадкової величини Х. Знайти: 1) значення параметра с; 2) функцію щільності розподілу; 3) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Х; 4) ймовірність того, що Х прийматиме значення з інтервалу (1;3);.

<u>Розв'язок</u>. Щільність розподілу випадкової величини Х $f(x) = 2(a+1)x$, *при* $x \in [0;2]$. Значення параметра с визначаємо, використовуючи власти-

вість щільності розподілу: $\int_0^2 2(a+1)xdx = (a+1)x^2\Big|_0^2 = 4(a+1) = 1$. Звідси $a = -\frac{3}{4}$. Тоді характеристики $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$,

$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx = \int_0^2 (x-\frac{4}{3})^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{9}x)dx =$

$= \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^2)\Big|_0^2 = \frac{2}{9}$. Ймовірність $P\{X \in (1;3)\} = \int_1^3 \frac{x}{2}dx = \int_1^2 \frac{x}{2}dx =$

$= \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}$.

Задача 2. Ймовірність безвідмовної роботи технічного пристрою розподілена за показниковим законом $f(t) = 0{,}005e^{-0{,}005t}$ (t>0). Знайти ймовірність того, що пристрій пропрацює 500 годин.

Розв'язок. Оскільки функція показникового розподілу має вигляд $F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{-0{,}005t}$, то $P\{t \geq 500\} = e^{-0{,}005\cdot 500} = 0{,}0821$.

3. Задачі для аудиторного розв'язування

5.1. Дана функція розподілу F(x) випадкової величини X. Знайти:

1) значення параметра c; 2) функцію щільності розподілу; 3) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X; 4) ймовірність того, що X прийматиме значення з інтервалу (0;1); 5) побудувати графіки функції щільності розподілу та функції розподілу:

а) $F(x) = \{0,\ при\ x < -2;\ ax^2 + 1,\ при\ -2 \leq x \leq 1;\ 1,\ при\ x > 1\}$;

б) $F(x) = \{0,\ при\ x < -2;\ (a+x)^2,\ при\ -2 \leq x \leq 2;\ 1,\ при\ x > 2\}$.

6.2. Випадкова величина X розподілена по закону, що визначається щільністю розподілу ймовірностей виду

$$f(x) = \begin{cases} c\cos(x + \pi/4),\ якщо\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0,\ если\ \ |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти константу c, обчислити $P\{|X| < \pi/4\}$, MX, DX.

5.3. Функція розподілу випадкової величини неперервного типу задана у вигляді

$$F_X(x) = \begin{cases} 0,\ якщо\ x \leq 0, \\ x^2/6,\ якщо\ 0 < x \leq 3, \\ 1,\ якщо\ x > 3. \end{cases}$$

Обчислити $P\{X \geq 2\}$, MX, DX.

5.4. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ. Вивести рекурентну формулу, що виражає центральний момент (к+1)-го порядку через центральний момент к-го порядку і математичне сподівання,
обчислити коефіцієнт асиметрії і коефіцієнт ексцесу показникового розподілу

5.5. Тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0,05t}$, $(t > 0)$. Знайти ймовірність того, що за t=10 год. елемент: 1) відмовить; 2) не відмовить.

5.6. Стержень довжини l розламали на дві частини. Знайти функцію розподілу довжини меншої частини.

5.7. Випадкова величина розподілена по закону “прямокутного трикутника” в інтервалі (0,a) (див. рис. 5.1.).
1. Записати вираз для функції щільності розподілу.
2. Знайти функцію розподілу.
3. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X на участок від a/2 до a.
4. Знайти характеристики величини X: MX, DX, σ_X, $\mu_3(X)$.

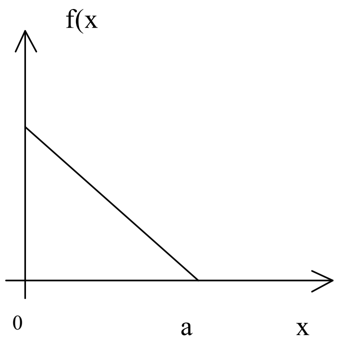


Рис. 5.1.

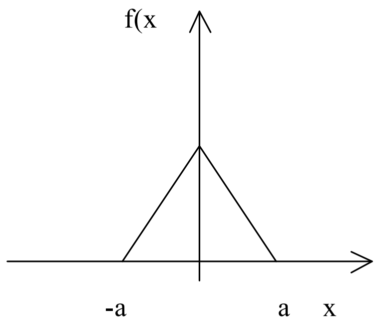


Рис. 5.2.

5.8. Шкала секундоміра має ціну поділки 0,2 сек. Яка ймовірність зробити по цьому секундоміру відрахунок часу з помилкою більше 0,05 сек., якщо відрахунок робиться з точністю до найближчої цілої поділки з округленням в ближчу сторону?

5.9. Виразити центральний момент μ_k через початкові моменти.

4. Задачі для домашнього розв’язування

5.10. Дана функція розподілу F(x) випадкової величини X. Знайти:
значення параметра c; 2) функцію щільності розподілу; 3) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X; 4) ймовірність того, що X прийматиме значення з інтервалу $(0;\pi)$; 5) побудувати графіки функції щільності розподілу та функції розподілу:

а) $F(x)=\{0,\ при\ x<0;\ a(1-\cos x),\ \ при\ \ 0\le x\le\pi;\ 1,\ при\ \ x>\pi\}$;

б) $F(x)=\{0,\ при\ x<-\pi;\ \ (\sin x)^2,\ \ при\ -\pi\le x\le\pi;\ 1,\ при\ \ x>\pi\}$.

5.11. Випадкова величина X розподілена за законом Сімпсона на участку від –а до а (див. рис. 5.2.).

1. Написати вираз для функції щільності розподілу.
2. Побудувати графік функції розподілу.
3. Знайти характеристики випадкової величини X: MX, DX, σ_X, $\mu_3(X)$.
4. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал $(-\frac{a}{2}, a)$.

5.12. Виразити початковий момент α_k через центральні моменти і математичне сподівання MX.

5.13. Ймовірність безвідмовної роботи телевізора розподілена за показниковим законом $f(t)=0{,}005e^{-0{,}015t}$, $(t>0)$. Знайти ймовірність того, що телевізор пропрацює 100 годин.

5.14. Неперервна випадкова величина має показниковий розподіл з функцією щільності $f(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x<0,\\ 7e^{-7x}, & при\ \ x\ge 0\end{cases}$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань випадкова величина X попаде в інтервал (2;3).

5. Задачі підвищеної складності.

5.15. Крива розподілу випадкової величини X представляє собою еліпс з півосями а і в. Величина а відома. Необхідно визначити величину в, знайти математичне сподівання та дисперсію і побудувати функцію розподілу F(x).

5.16. Випадкова величина розподілена за законом арксинуса з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)=\begin{cases}0, & якщо\ |x|\ge a,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & якщо\ |x|<a\end{cases}$. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію.

5.17. Випадкова величина X має розподіл Коші, що визначається функцією розподілу ймовірностей $F(x)=b+c\,arctg\frac{x}{a}$ при $-\infty<x<\infty$. Вибрати коефіцієнти a, b, c таким чином, щоб даний розподіл відповідав випадковій величині неперервного типу, обчислити щільність розподілу

Коші. Чи існують математичне сподівання і моменти більш високих порядків у даного розподілу?

<u>Практичне заняття № 6.</u>
Нормальний розподіл. Функція Лапласа.
Локальна та інтегральна теореми Лапласа.

1. Теоретичні відомості. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Функцією Лапласа, або інтегралом ймовірностей називається функція: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Ймовірність попадання нормально розподіленої величини X на відрізок від α до β виражається формулою: $P\{\alpha<X<\beta\}=\Phi(\frac{\beta-m}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-m}{\sigma})$. Ймовірність попадання нормально розподіленої величини X на відрізок довжиною $2l$, симетричний відносно центра розсіювання $P\{|X-MX|<l\}=2\Phi(l/\sigma)$.

Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p появи події А в кожному досліді дорівнює p, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія А з'явиться в n дослідах k раз, приблизно дорівнює: $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x_k^2}{2}}$, де $x_k=(k-np)/\sqrt{npq}$.

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p пояаи події А в кожному досліді постійна і відмінні від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k_1,k_2)$ того, що подія А з'явиться в n дослідах від k_1 до k_2 раз, приблизно дорівнює інтегралу: $P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x'')-\Phi(x')$, де $x'=(k_1-np)/\sqrt{npq}$ і $x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}$.

2. Приклади розв'язку задач. <u>*Задача 1*</u>. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу із математичним сподіванням $MX=10$, середнім квадратичним відхиленням $\sigma=5$. Знайти симетричний відносно MX інтервал, в який з ймовірністю $p=0{,}9544$ попадає X.

Розв'язок. Використаємо відому формулу $P\{|X-MX|<l\}=2\Phi(l/\sigma)$. Враховуючи, що $2\Phi(l/\sigma)=p$ і підставивши значення, одержимо $\Phi(l/5)=$

$= p/2 = 0{,}9544/2 = 0{,}4772$. З таблиці функції Лапласа знаходимо, що $l/5 = 2{,}0, \quad l = 10$. Тоді інтервалом симетричним відносно MX є (0; 20).

Задача 2. Проводяться послідовні досліди за схемою Бернуллі. Ймовірність здійснення події А в одному досліді 0,6. Знайти ймовірність того, що в 60 дослідах подія А з'явиться від 30 до 40 раз.

Розв'язок. Використаємо інтегральну теорему Лапласа. Знайдемо $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq} = (30 - 60\cdot 0{,}6)/\sqrt{60\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4} = -1{,}58$ і $x'' = (k_2 - np)/$ $/\sqrt{npq} = (40 - 60\cdot 0{,}6)/\sqrt{60\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4} = 1{,}06$. Тоді $P_{60}(30{,}40) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') =$ $= \Phi(1{,}06) - \Phi(-1{,}58) = \Phi(1{,}06) + \Phi(1{,}58) = 0{,}355 + 0{,}443 = 0{,}798$.

3. Задачі для аудиторного розв'язування

6.1. Ймовірність появи події в кожному із незалежних випробовувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія настане 60 разів в 144 випробовуваннях.

6.2. Ймовірність появи події у кожному із незалежних випробовувань дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в 100 випробовуваннях подія настане не менше 30 і не більше 40 разів.

6.3. Випадкова величина має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $MX = 10$, $DX = 5$. Знайти симетричний відносно MX інтервал, в який з ймовірністю 0,9955 попадає виміряне значення.

6.4. Ймовірність видужання хворого за результатами нового методу лікування дорівнює 0,9. Скільки вилікуваних із 200 хворих можливо чекати з ймовірністю 0,8?

6.5. Ймовірність того, що пасажир запізниться на поїзд дорівнює 0,01. Знайти найбільш ймовірне число тих, що запізнилися із 700 пасажирів і ймовірність цієї події.

6.6. Знайти ймовірність того, що в 8 незалежних випробовуваннях подія А настане не менше ніж три рази, якщо ймовірність появи події А при кожному випробовуванні дорівнює 0,8.

6.7. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 200 народжених буде 100 хлопчиків.

6.8. Деяка категорія людей має середню вагу m кг і середнє квадратичне відхилення ваги 3 кг. Для випадків $m = 60$ *і* $m = 10$ визначити ймовірність того, що вага випадково взятої людини відрізняється від m не більше ніж на 5 кг, якщо вага має нормальний розподіл.

6.9. Визначити для нормально розподіленої випадкової величини X, що має MX=0, 1) $P\{X \ge k\sigma\}$ і 2) $P\{|X| \ge k\sigma\}$ $(при\ k = 1{,}2{,}3)$.

6.10. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням MX=0. Ймовірність попадання цієї випадкової величини на участок від -а до а дорівнює 0,5. Знайти σ_x і написати функцію щільності нормального закону.

4. Задачі для домашнього розв'язування

6.11. Ймовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 80 разів.

6.12. Знайти ймовірність того, що в партії серед 1000 технічних пристроїв число пристроїв вищого гатунку міститься між 600 і 800, якщо ймовірність того, що пристрій вищого гатунку дорівнює 0,8.

6.13. Випадкова величина Х нормально розподілена з математичним сподіванням 3 і середнім квадратичним відхиленням 0,5. Яка ймовірність того, що при першому досліді випадкова величина буде на інтервалі (2;5), а при другому – на (2;4)?

6.14. Випадкова величина Х нормально розподілена з математичним сподіванням 10. Яким повинно бути середнє квадратичне відхилення, щоб з ймовірністю 0,9 відхилення від математичного сподівання по абсолютній величині не перевищувало 0,1?

6.15. При проведенні експерименту із 4096 разів герб випав 2068 разів. З якою ймовірністю можливо було чекати цей результат?

6.16. Нормально розподілена випадкова величина Х має нульове математичне сподівання. Визначити середнє квадратичне відхилення σ, при якому ймовірність $P(a < X < b)$ була б найбільшою ($0 < a < b$).

6.17. Завод виготовляє шарики для підшипників. Номінальний діаметр шариків $d_0 = 5\,мм$. Внаслідок неточності виготовлення шарика фактичний його діаметр – випадкова величина, розподілена за нормальним законом із середнім значенням d_0 і середнім квадратичним відхиленням $\sigma_d = 0{,}05\,мм$. При контролі бракуються всі шарики, діаметр яких відрізняється від номінального більше ніж на 0,1 мм. Визначити, який процент шариків в середньому буде відбраковуватися.

6.18. Випадкова величина має нормальний розподіл з МХ=1 і DX=σ^2. Відомо, що $P\{X < 2\} = 0{,}99$. Обчислити MX^2 *і* $P\{X^2 > 2\}$.

5. Задачі підвищеної складності

6.19. Випадкова величина Х має нормальний розподіл з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. Яка з двох подій $\{|X| < 0{,}7\}$ *чи* $\{|X| > 0{,}7\}$ має більшу ймовірність?

6.20. Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу при її виготовленні на даному станку має нульове математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення, рівне 5 мк. Скільки необхідно виготовити деталей, щоб з ймовірністю не менше 0,9 серед них була хоча б одна гідна, якщо для гідної деталі допустиме відхилення розміру від номіналу не більше ніж 2 мк?

6.21. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням m і середнім квадратичним відхиленням σ. Визначити абсциси x_1, x_2 і ординату точок перегину кривої розподілу $y = f(x)$.

6.22. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом $N(-1{,}1)$. Обчислити асиметрію та ексцес.

Практичне заняття № 7.

Закон розподілу та числові характеристики двохмірної випадкової величини. Функції випадкових величин.

1. Теоретичні відомості. *Функцією розподілу* системи двох випадкових величин (X, Y) називається ймовірність сумісного виконання двох нерівностей: $X < x,\ Y < y$: $F(x, y) = P(X < x; Y < y)$. Її властивості: 1. $F(x, y)$- неспадна функція обох своїх аргументів. 2. $F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0$. 3. $F(+\infty,+\infty) = 1$. 4. $F(x,+\infty) = F_1(x) = P\{X < x\}$, $F(+\infty, y) = F_2(y) = P\{Y < y\}$. 5. $F(x, y)$ - неперервна зліва по будь-якому аргументу.

Якщо X, Y- система дискретних випадкових величин і X приймає значення $\{x_1, x_2,..., x_n\}$, $Y - \{y_1, y_2,..., y_m\}$, то ймовірність того, що X прийме значення x_i, а Y - y_j: $p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\}$. Матриця розподілу двох дискретних випадкових величин X, Y має вигляд:

$x_i \setminus y_j$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

Функція розподілу системи (X, Y): $F(x, y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}$. *Закони розподілу* випадкових величин, що входять у систему: $p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$,

$p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.*Сумісна щільність розподілу* системи неперервних випадкових величин X, Y: $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$. Її властивості: 1. $f(x,y) \geq 0$. 2. $\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Знаючи сумісну щільність розподілу, можна одержати *функції розподілу аргументів*: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$, $F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$. *Математичне сподівання* дискретних і неперервних випадкових величин визначається, відповідно, виразами: $MX = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}$, $MY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}$, $MX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$, $MY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$. Точка (MX, MY) називається центром розсіювання системи випадкових величин.. Вирази для дисперсій: $DX = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - MX)^2 p_{ij}$, $DY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_j - MX)^2 p_{ij}$, $DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)^2 f(x,y)dxdy$, $DY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y - MY)^2 f(x,y)dxdy$. Для незалежних випадкових величин: $F(x,y) = F_1(x)F_2(x)$, для дискретних незалежних випадкових величин: $p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}$, для неперервних незалежних випадкових величин: $f(x,y) = f_1(x) f_2(x)$.

Коваріацією випадкових величин X, Y називається: $K_{xy} = M(X - m_x) \times \times (Y - M_y) = MXY - MXMY$. *Коефіцієнт кореляції*: $r_{xy} = K_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$.

2. Приклади розв'язку задач. *Задача 1*. Є закон розподілу системи випадкових величин (X,Y) дискретного типу, що визначається таблицею. Знайти безумовні закони розподілу окремих компонент X та Y, встановити, чи залежні X і Y.

X_i \ Y_j	1	2	3
2	0,05	0,3	0,2
3	0,05	0,1	0,3

Розв'язок. Використовуючи формули $p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, $p_{y_j} = $
$= P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, одержимо закони розподілу:

X	2	3	Y	1	2	3
p	0,55	0,45	p	0,1	0,4	0,5

Визначимо, чи є величини X і Y незалежними. Оскільки для незалежних величин повинна виконуватись рівність $p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}$, а $p_{11} = 0{,}05 \neq p_{x_1} \cdot p_{y_1} = 0{,}55 \cdot 0{,}1 = 0{,}055$, то випадкові величини залежні.

Задача 2. Задана сумісна щільність розподілу випадкових величин X та Y.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x - y + 2), & \text{при } \; 0 < x < 2, \; 0 < y < 2, \\ \quad 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}.$$

Визначити константу с та знайти $P\{X + Y < 2\}$.

Розв'язок. Константу с знаходимо з умови $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(x, y)dxdy = 1$. Тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int c(x - y + 2)dxdy = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{2} c(x - y + 2)dxdy = c\int\limits_{0}^{2}(\frac{x^2}{2} - yx + 2x)\Big|_0^2 dy = c\int\limits_{0}^{2}(6 - 2y)dy =$$

$= 8c = 1$. Звідси $c = \frac{1}{8}$. Оскільки ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D визначається рівністю $P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy$, то

$$P\{X + Y < 2\} = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{2-y}(x - y + 1)dxdy = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{2}(\frac{x^2}{2} - yx + x)\Big|_0^{2-y} =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{2}(\frac{(2-y)^2}{2} - y(2 - y) + 2 - y)dy = \frac{1}{8}(\frac{y^3}{2} - \frac{5}{2}y + 4y)\Big|_0^2 = \frac{7}{8}.$$

3. Задачі для аудиторного розв'язування

7.1. Є закон розподілу системи випадкових величин (X,Y) дискретного типу, що визначається таблицею. Знайти безумовні закони розподілу окремих компонент X та Y; встановити, чи залежні X і Y.

$X_i \backslash Y_j$	1	2	3	4
2	0,1	0,1	0,2	0,1
3	0,2	0,1	0,1	0,1

7.2. Повідомлення може пройти по двом каналам зв'язку. Ймовірність проходження по першому каналу – 0,3, по другому – 0,7. Випадкова величина $X = \begin{cases} 1, \textit{ якщо повідомлення пройшло по першому каналу}, \\ 0, \textit{ в іншому випадку} \end{cases}$,

Y визначається аналогічно для другого каналу. Знайти сумісну функцію розподілу випадкових величин X та Y.

7.3. Стріляють два рази по мішені при незмінних умовах. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,5. Випадкові величини: X - число пострілів до першого попадання (включно), Y – число промахів. Описати закон розподілу системи випадкових величин (X,Y). Знайти центр розсіювання даного розподілу (MX, MY) і значення σ_X^2, σ_Y^2, обчислити коефіцієнт кореляції.

7.4. Задана сумісна щільність розподілу випадкових величин X та Y:

а) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & \textit{при } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \textit{в інших випадках} \end{cases}$,

б) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(xy+y), & \textit{при } 0 < x < 2,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \textit{в інших випадках} \end{cases}$.

Визначити константу с та знайти $P\{X+Y<1\}$.

7.5. Закон розподілу двохмірного випадкового вектора описується щільністю розподілу ймовірностей наступного вигляду: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$. Записати вираз для безумовної щільності $f_X(x)$ і вказати значення основних параметрів сумісного розподілу.

7.6. Система випадкових величин (X,Y) розподілена за законом:

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}$. Знайти коефіцієнт a. Встановити, чи є величини X і Y залежними, знайти $f_1(x)$, $f_2(x)$. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в границі квадрата R , центр якого співпадає з початком координат, а сторони паралельні осям координат і мають довжину $b = 2$.

7.7. Вершина С прямого кута прямокутного рівнобедреного трикутника з'єднується відрізком прямої з довільною точкою М основи; довжина основи 2 м. Знайти математичне сподівання довжини відрізка СМ.

7.8. Випадкова величина розподілена за законом Пуассона. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = \cos bX$.

7.9. Дано функцію щільності ймовірності $f(x)$ випадкової величини X $(0 < X < \infty)$. Знайти функцію щільності розподілу випадкової величини $Y = \ln X$.

7.10.Випадкова величина X розподілена за законом Коші $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Знайти функцію щільності ймовірності випадкової величини Y, якщо: а) $Y=1-X^3$; б) $Y=aX^2$.

4. Задачі для домашнього розв'язування

7.11. Є закон розподілу системи випадкових величин (X,Y) дискретного типу визначається таблицею. Знайти безумовні закони розподілу окремих компонент X та Y; встановити, чи залежні X і Y.

$X_i \backslash Y_j$	10	20	30	40
20	0,3	0,2	0,1	0,05
30	0,05	0,1	0,05	0,15

7.12. Із урни, що містить 10 білих і 5 чорних кульок, навмання дістають 2 кульки без повернення. Випадкові величини: X – число білих кульок у вибірці, Y - число чорних кульок у вибірці. Описати закон розподілу випадкового вектора (X,Y) і обчислити коефіцієнт кореляції.

7.13. Задана сумісна щільність розподілу випадкових величин X та Y:

а) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c(x^2+y^2), & при\ \ 0<x<1,\ \ 0<y<1, \\ 0, & в\ \ інших\ \ випадках \end{cases}$,

б) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c(2x^2+3y^2), & при\ \ 0<x<2,\ \ 0<y<1, \\ 0, & в\ інших\ випадках \end{cases}$.

Знайти константу с, $P\{X+Y<1\}$, центр розсіювання і функцію розподілу $F_X(x)$ для системи випадкових величин.

7.14. Проводиться стрільба по точковій цілі, зона ураження якої є колом з радіусом r і центром в початку координат. Розсіювання точки попадання снаряда нормальне кругове з параметрами MX=MY=0, $\sigma_X=\sigma_Y=2r$. Скільки пострілів необхідно зробити, щоб уразити ціль з ймовірністю, не меншою 0,95?

7.15. Щільність розподілу системи випадкових величин (X,Y) задана формулою $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{1{,}6\pi}e^{-\frac{1}{1{,}28}\left[(x-2)^2-1{,}2(x-2)(y+3)+(y+3)^2\right]}$. Знайти коефіцієнт кореляції величин X і Y.

7.16. На колі радіусом a з центром в початку координат навмання вибрана точка.Знайти математичне сподівання площі квадрата із стороною, що дорівнює абсцисі цієї точки.

7.17. На відрізку довжиною l навмання вибрані дві точки. Знайти математичне сподівання і дисперсію відстані між ними.

7.18. Знайти щільність ймовірності випадкової величини $Z = aX^2$, якщо X- нормальна випадкова величина, MX=0, DX=σ^2, $a > 0$.

7.19.Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Визначити функцію щільності ймовірності випадкової величини $Y = a\sin\frac{2\pi}{T}X$.

5. Задачі підвищеної складності

7.20. Функція сумісного розподілу двох випадкових величин X і Y має наступний вигляд:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } \min(x,y) < 0, \\ \min(x,y), \textit{якщо } 0 \le \min(x,y) < 1, \\ 1, \textit{якщо } \min(x,y) \ge 1. \end{cases}$$

Знайти одномірні закони розподілу компонент і вирішити питання про їх залежність або незалежність.

7.22. Випадковий вектор (X,Y) розподілений рівномірно в трикутнику з вершинами в точках (-1,0), (1,2), (1,0). Обчислити центр розсіювання даного розподілу.

7.23. Визначити в точці $x_1 = x_2 = 2$ щільність ймовірності системи двох нормальних випадкових величин, для яких $MX_1 = MX_2 = 0$ i $\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

7.24.Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = |1 - X|$.

7.25. Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)$. Випадкова величина Y визначається через X співвідношенням $Y = \min\{X, 1\}$. Знайти закон розподілу випадкової величини Y і визначити її математичне сподівання і дисперсію.

7.26. Випадкові величини X і Y незалежні і однаково розподілені за законом $N(0,\sigma)$. Встановити, за яким законом розподілена випадкова величина $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

<u>*Практичне заняття № 8.*</u>
Емпірична функція розподілу, гістограма та полігон частот, точкові та інтервальні оцінки

1. Теоретичні відомості. *Математична статистика* – наука, що вивчає методи обробки дослідних даних, що одержані в результаті спостережень випадкових явищ. До задач математичної статистики належать: опис явищ, аналіз та прогноз, вироблення оптимальних рішень.

Варіаційним рядом вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$ називають спосіб її запису, при якому елементи розміщуються в порядку зростання. *Статистичним рядом* називається аналог ряду розподілу, де замість ймовірностей стоять частоти. *Емпіричною функцією розподілу* називається $F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{z_i<x} n_i$, де z_i - елементи вибірки. *Гістограмою частот* групованої вибірки називається кусково постійна на інтервалах групування функція, що приймає на кожному з них значення $\frac{n_i}{b}$, де n_i- частоти, b- ширина інтервалу.

Статистичні оцінки класифікують за такими ознаками: 1. *Незміщеною* називають таку оцінку, математичне сподівання якої дорівнює параметру, що оцінюється при будь-якому об'ємі вибірки. 2. *Ефективною* називають статистичну оцінку, яка при даному обсязі вибірки має найменшу дисперсію. 3. *Змістовною* називають статистичну оцінку, яка при $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до параметру, що оцінюється.

Точковою називають оцінку, що визначається одним числом, *інтервальною* – що визначається інтервалом. Точковою оцінкою математичного сподівання є середнє $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Точковою оцінкою дисперсії – вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. *Довірчий інтервал* для математичного сподівання при відомому середньому квадратичному відхиленню: $(\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}})$. Довірчий інтервал для математичного сподівання при невідомому середньому квадратичному відхиленню: $(\overline{x} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}})$, де t_γ знаходять за таблицями розподілу Ст'юдента.

2. Приклади розв'язку задач. <u>*Задача 1.*</u> Нехай дана вибірка X:
44 24 55 76 74 85 6 45 72 28 36 16 13 30 35 8 39 42 53 43 43 43 77 48 46 89 67 98 37 83 18 61 68 88 48 40 64 42 65 21 33 20 43 49 51 44 94 15 35.

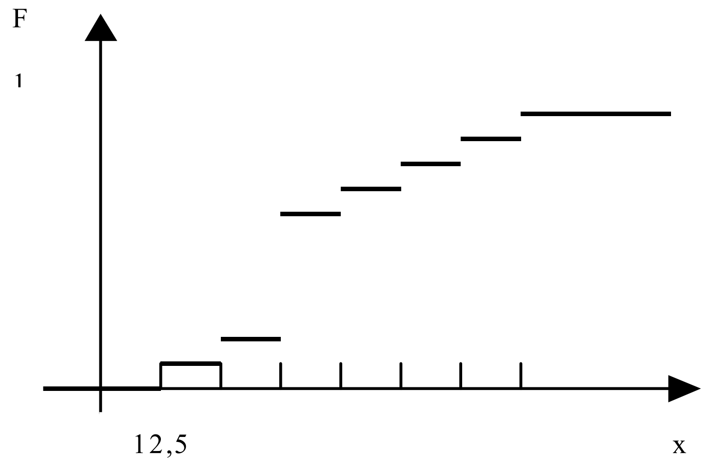
Провести її аналіз.

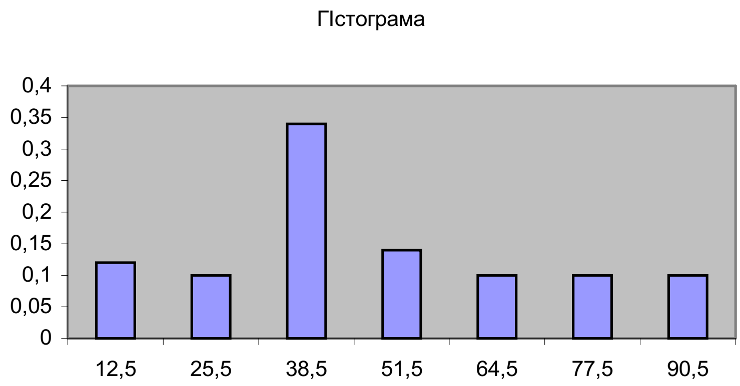
<u>*Розв'язок*</u>.Середнє значення вибірки $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{50}(44 + 24 + ... + 35) = 47{,}88$. Мінімальне значення вибірки $x_{\min} = 6$, максимальне - $x_{\max} = 98$. Розмах вибірки становить $\rho = x_{\max} - x_{\min} = 98 - 6 = 92$. Кількість класів $d = 1 + 1{,}33\lg(50) \approx 7$. Для того, щоб кінці класів були б цілими числами, необхідно, щоб ширина класу була цілим числом. В зв'язку з цим замінимо елемент вибірки 98 на 97, що не приведе до значної похибки. Маємо: $\rho = 91,\ \ h = 13$. Будуємо таблицю варіаційного ряду (якщо елемент попадає на границю класу, то його відносимо до того класу, в якому він є правою границею).

№ класу	Класи	Варіація	Емпіричні частоти	Щільності частот
1	6 …19	12,5	6	0,12
2	19…32	25,5	5	0,1
3	32…45	38,5	17	0,34
4	45…58	51,5	7	0,14
5	58…71	64,5	5	0,1
6	71…84	77,5	5	0,1
7	84…97	90,5	5	0,1

Будуємо емпіричну функцію розподілу і гістограму:

$$^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 12{,}5, \\ 0{,}12, & 12{,}5 < x \le 25{,}5, \\ 0{,}22, & 25{,}5 < x \le 38{,}5, \\ 0{,}56, & 38{,}5 < x \le 51{,}5, \\ 0{,}7, & 51{,}5 < x \le 64{,}5, \\ 0{,}8, & 64{,}5 < x \le 77{,}5, \\ 0{,}9, & 77{,}5 < x \le 90{,}5, \\ 1, & x > 90{,}5 \end{cases}$$



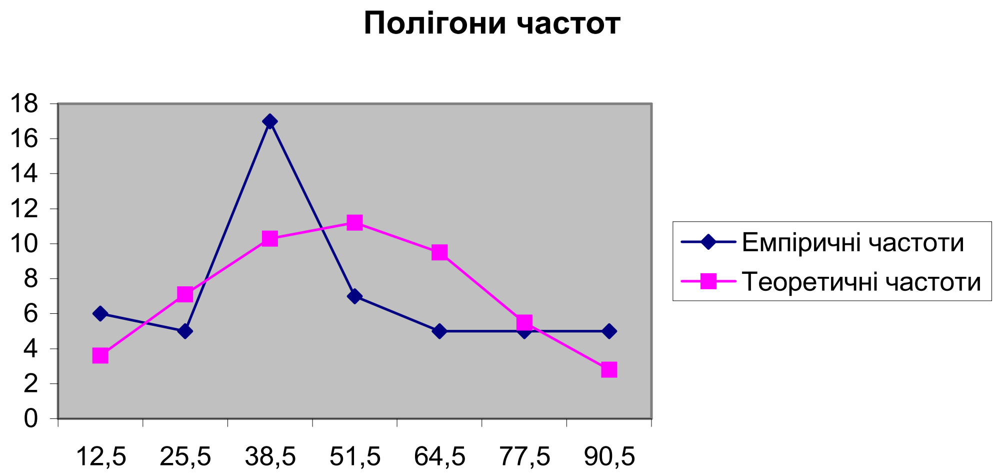


Обчислимо незміщену оцінку дисперсії і оцінку середнього квадратичного відхилення:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - M\right)^2 = \frac{1}{49}(44+24+...+35) = 542{,}76, \quad \sigma = \sqrt{542{,}76} = 23{,}3.$$

Далі обчислюємо $X_i = \dfrac{W_i - M}{\sigma}$, де W_i - значення варіації. Маємо: $X_1 = -1.52,\ X_2 = -0.96,\ X_3 = -0.40,\ X_4 = 0.16,\ X_5 = 0.71,\ X_6 = 1.27,\ X_7 = 1.83.$

Обчислюємо теоретичні частоти за формулою $f_i = \dfrac{nh}{\sigma}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}}$. Одержимо: $f_1 = 3.6,\ f_2 = 7.1,\ f_3 = 10.3,\ f_4 = 11.2,\ f_5 = 9.5,\ f_6 = 5.5,\ f_7 = 2{,}8$.



Для порогу ймовірності безпомилкових прогнозів 0,95 за таблицею Ст'юдента знайдемо значення критерію надійності прогнозу $t_\gamma = 2.009$. Знайдемо точність прогнозу: $m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{23{,}3}{\sqrt{50}} = 3{,}29$, абсолютну похибку прогнозу середнього значення $\Delta = m \cdot t_\gamma = 3{,}29 \cdot 2{,}009 = 6{,}61$. Прогноз генерального середнього значення має вигляд $M \pm \Delta = 47{,}88 \pm 6{,}61$. Таким чином, мінімальне середнє значення – 41,27, максимальне – 54,49.

3. Задачі для аудиторного розв'язування

8.1. Для вибірки X (див. таблицю):

1	0	14	16	13	16	4	0	21	0	4	1	27	7	10
9	7	0	3	1	16	7	15	5	9	25	17	14	1	23
5	29	16	26	6	9	9	20	7	7	7	11	7	5	0
3	2	1	4	1	18	10	11	6	8	11	10	7	8	9

Обчислити середнє значення M, показники розсіювання значень (мінімальне, максимальне значення, розмах ρ як різницю між найменшим та найбільшим значенням вибірки, кількість класів за формулою $d = 1 + 3.3\lg n$, ширину класів за формулою $h = \dfrac{\rho}{d}$, початки та кінці класів. Побудувати таблицю варіаційного ряду, включивши в неї: порядкові номери класів, класи (початок і кінець класу), значення варіацій (середнє арифметичне початку та кінця класу), емпіричні частоти, щільності частот. Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ та гістограму розподілу значень. За формулою Лапласа обчислити вирівнюючі теоретичні частоти значень, для чого обчислити незміщену оцінку дисперсії $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum(x_i - M)^2$, середнього квадратичного відхилення $\sigma = \sqrt{S^2}$, нормовані величини $X_i = \dfrac{W_i - M}{\sigma}$, де W_i - значення варіації, теоретичні частоти $f_i = \dfrac{nh}{\sigma}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}}$. На загальному графіку побудувати полігони емпіричних та вирівнюючих частот з метою їх порівняння. Для порогу ймовірності безпомилкових прогнозів 0,95 за таблицею Ст'юдента знайти значення критерію надійності прогнозу t_γ.

Обчислити точність прогнозу: $m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, абсолютну похибку прогнозу середнього значення $\Delta = m \cdot t_\gamma$. За допомогою довірчого інтервалу записати прогноз генерального середнього значення у вигляді $M \pm \Delta$. Зробити висновки про мінімальне та максимальне середнє значення.

8.2 За методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметра показникового розподілу.

8.3. Вибіркові оцінки в задачах визначались за результатами n спостережень. Знайти 90% і 99% -й інтервали для математичного сподівання (середнього) наступної характеристики: часу безвідмовної роботи електронної лампи, якщо $\bar{x}=500,\ n=100$, середнє квадратичне відхилення відоме і рівне 10 год.

8.4. Глубина моря вимірюється приладом, систематична похибка якого дорівнює нулю, а випадкові помилки розподілені нормально із середнім квадратичним відхиленням 20 м. Скільки потрібно зробити незалежних вимірювань, щоб визначити глубину з похибкою не більшою 15 м при довірчій ймовірності 90%?

8.5. Проведено 100 незалежних дослідів, в результаті яких подія А спостерігалась 40 раз. Визначити границі довірчого інтервалу для ймовірності появи події в одному досліді при довірчій ймовірності 0,95 і 0,99, якщо число появи події А має біноміальний розподіл.

8.6. Знайти ймовірність того, що при $n=1000$ киданнях монети помилка від заміни ймовірності частотою не перевищить $\varepsilon=0{,}01$.

8.7. При обробці результатів $n=40$ незалежних дослідів одержані оцінки математичного сподівання і дисперсії $\tilde{x}=4{,}52,\ \tilde{D}=2{,}35$. Знайти ймовірність того, що поклавши $m=\tilde{m}=4{,}52$, ми не зробимо помилки більшої, ніж $\varepsilon=0{,}2$.

4. Задачі для домашнього розв'язування

8.11. Розв'язати задачу 8.1. для наступної вибірки:

12	5	27	24	39	14	12	28	24	24	38	31	24	17	24	17	15	16
8	12	1	12	37	23	22	23	10	26	31	22	24	30	14	13	24	23
21	35	17	28	15	30	23	22	25	21	7	19	25	27	17	15	25	22
11	29	8	14	25	11	13	7	10	21	6	33	16	27	11	19	19	22
15	17	4	20	14	28	20	24	19	15	30	24	22	14	15	23	20	31

8.12. Знайти 90% і 99% -й інтервали для математичного сподівання (середнього) вмісту вуглецю в одиниці продукту, якщо $\bar{x}=18г.,\ n=25,\ s^2=16г.$

8.13. При випробовуваннях кожного із 10 приладів не спостерігалось ні однієї відмовию Визначити границі довірчого інтервалу для ймовірності відмови при довірчій ймовірності 0,9 і 0,99, якщо число відмов має біноміальний розподіл.

8.14. Проведено $n=1000$ дослідів з метою визначення ймовірності p події А. Із цих 1000 дослідів в 400 з'явилась подія А. Знайти ймовірність того, що прийнявши $p \approx p^* = 400/1000$, ми не зробимо помилки більшої, ніж $\varepsilon = 0{,}01$.

8.15. При обробці результатів $n = 200$ незалежних дослідів одержані оцінки математичного сподівання і дисперсії $\tilde{x} = 6{,}43$, $\tilde{D} = 4{,}02$. Знайти ймовірність того, що поклавши $m = \tilde{m} = 6{,}43$, ми не зробимо помилки більшої, ніж $\varepsilon = 0{,}2$.

5. Задачі підвищеної складності.

8.21. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ - вибірка із генеральної сукупності із скінченним початковим моментом α_{2l}. Знайти оцінку початкового моменту α_l. Показати, що одержана оцінка є незміщеною.

8.22. За методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметра σ по вибірці об'ємом n із нормально розподіленої генеральної сукупності з відомим математичним сподіванням m.

8.23. Довести, що для розподілу Лапласа, який задають функцією щільності розподілу $f(x;\theta) = \frac{1}{2} e^{-(x-\theta)}$, $x \in R$, оцінка методу максимальної правдоподібності θ співпадає з вибірковою медіаною.

<u>Практичне заняття № 9.</u>
Лінійна кореляція.
Перевірка гіпотези про розподіл генеральної сукупності.

1. Теоретичні відомості. При великій кількості спостережень системи випадкових величин (X, Y) одне і те ж значення x може зустрітися n_x раз, одне і те ж значення y - n_y раз, одна і та ж пара (x, y) може спостерігатися n_{xy} раз. Дані групують і записують у вигляді кореляційної таблиці, наприклад:

Y	X				
	2	3	4	5	n_y
1	0	1	2	0	3
2	0	7	5	5	17
3	3	0	0	1	4
4	2	0	5	0	7
n_x	5	8	12	6	N=31

Вибірковий коефіцієнт кореляції визначається рівністю $r_b = \dfrac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\overline{\sigma_x}\,\overline{\sigma_y}}$, де x і y - значення ознак X та Y; n_{xy}- частота пари (x, y); $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$ - вибіркові середні квадратичні відхилення; $\overline{x}$, $\overline{y}$ - вибіркові середні. Рівняння вибіркового рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд: $\overline{y_x} - \overline{y} = r_b \dfrac{\overline{\sigma_y}}{\overline{\sigma_x}}(x - \overline{x})$; X на Y - $\overline{x_y} - \overline{x} = r_b \dfrac{\overline{\sigma_x}}{\overline{\sigma_y}}(y - \overline{y})$.

На основі дослідів складений статистичний ряд розподілу випадкової величини X:

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

де $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$- частота події $\{X = x_i\}$, n_i- число дослідів, в яких з'явилась ця подія, $i = \overline{1,k}$. Висувають гіпотезу H, яка полягає в тому, що випадкова величина має ряд розподілу:

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1	p_2	…	p_k

а відхилення частот p_i^* від ймовірностей p_i пояснюється випадковими причинами. В якості міри розбіжності R між гіпотетичним розподілом та статистичним при використанні критерію χ^2 береться сума квадратів відхилень $R = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - np_i)/(np_i)$. Розподіл χ^2 залежить від параметра r, який називають числом степенів свободи, і який дорівнює числу розрядів k мінус число незалежних умов, що накладені на p_i^*. Якщо обчислене значення χ^2 менше табличного значення χ^2, то підстав для відхилення гіпотези H немає, в протилежному випадку гіпотезу відкидають.

В.І. Романовським запропонований наступний критерій згоди: якщо величина $\left|\chi^2 - r\right| / \sqrt{2r}$ більша, або дорівнює 3, то розбіжність теоретичних і дослідних частот треба вважати не випадковою; якщо вона менше 3, то ця розбіжність випадкова.

2. Приклади розв'язку задач. *Задача 1.* Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці:

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125		1						1
150	1	2	5					8

175		3	2	12				17
200			1	8	7			16
225					3	3		6
250						1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	N=50

Хоча дані кореляційної таблиці рівновіддалені, для розрахунку вибіркового рівняння використаємо загальний метод, не пов'язаний з введенням "хибного" нуля. Знайдемо вибіркові середні: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum n_x x =$ $= \frac{1}{50}(18\cdot 1 + 23\cdot 6 + ... + 48\cdot 1) = 32.8$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum n_y y = \frac{1}{50}(125\cdot 1 + 150\cdot 8 + ... + 250\cdot 2) = 187.$

Знайдемо допоміжні величини (вибіркові початкові моменти другого порядку): $\overline{\alpha_x^2} = \frac{1}{n}\sum n_x x^2 = \frac{1}{50}(1\cdot 324 + 6\cdot 529 + ... + 1\cdot 2304) = 1113.8$,

$\overline{\alpha_y^2} = \frac{1}{n}\sum n_y y^2 = \frac{1}{50}(1\cdot 15625 + 6\cdot 22500 + ... + 1\cdot 62500) = 35700$.

Знаходимо вибіркові середні квадратичні відхилення:

$\sigma_x = \sqrt{\overline{\alpha_x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{11138 - 32.8^2} = 6.16$, $\sigma_y = \sqrt{\overline{\alpha_y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{35700 - 187^2} = 27.04.$

Знаходимо $\sum n_{xy} xy = 1\cdot 23\cdot 125 + 1\cdot 18\cdot 150 + ... + 1\cdot 48\cdot 250) = 313675$. Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_b = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\overline{\sigma_x}\overline{\sigma_y}} = \frac{313675 - 50\cdot 32{,}8\cdot 187}{50\cdot 6{,}16\cdot 27{,}04} = 0.84$.

Рівняння регресії $\overline{y_x} - 187 = 0.84\frac{27.04}{6.16}(x - 32.8)$, або спрощуючи та округлюючи $\overline{y_x} = 3.69x + 66$.

<u>*Задача 2.*</u> За даними вибірки побудувати дискретний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пір- сона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ і критерію Романовського визначити правомірність прийнятої гіпотези.

4 1 6 9 9 10 0 4 8 2 3 0 0 2 3 0 3 4 5 4 4 4 9 5 4 3 11 8 12 3 10 0 7 8 11 5 3 7 4 7 1 2 0 4 5 5 4 12 0 3.

<u>*Розв'язок.*</u> Будуємо дискретний варіаційний ряд

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	7	2	3	7	10	5	1	3	3	3	2	2	2

Висуваємо гіпотезу, шо елементи вибірки мають нормальний розподіл і перевіримо її. Знайдемо вибіркове середнє: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum n_x x = \frac{1}{50}(7\cdot 0 +$ $+ 2\cdot 1 + ... + 2\cdot 12) = 4.76$, вибірковий початковий момент другого порядку:

$\overline{\alpha_x^2} = \frac{1}{n}\sum n_x x^2 = \frac{1}{50}(7\cdot 0 + 2\cdot 1 + ... + 2\cdot 144) = 34.2$ і середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{\overline{\alpha_x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{34.2 - 4.76^2} = 3.4$. Складемо розрахункову таблицю:

I	x_i	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$	$\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_i^2}{2}}$	$n_i' = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i)$
1	0	-1,4	0,15	2,2
2	1	-1,11	0,22	3,2
3	2	-0,81	0,29	4,2
4	3	-0,52	0,35	5,2
5	4	-0,22	0,39	5,7
6	5	0,07	0,40	5,9
7	6	0,36	0,37	6,0
8	7	0,66	0,32	4,7
9	8	0,95	0,25	3,7
10	9	1,25	0,18	2,7
11	10	1,54	0,12	1,8
12	11	1,84	0,07	1,1
13	12	2,13	0,04	0,6

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти, для чого складемо розрахункову таблицю:

I	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	7	2,2	4,796	23,00	10,44
2	2	3,2	-1,19	1,41	0,44
3	3	4,2	-1,22	1,50	0,35
4	7	5,2	1,86	3,47	0,68
5	10	5,7	4,27	18,25	3,19
6	5	5,9	-0,86	0,74	0,13
7	1	6,0	-4,49	20,20	3,68
8	3	4,7	-1,73	2,98	0,63
9	3	3,7	-0,73	0,53	0,14
10	3	2,7	0,30	0,09	0,03
11	2	1,8	0,21	0,04	0,02
12	2	1,1	0,91	0,83	0,76
13	2	0,6	1,39	1,94	3,18
$\sum$					23.67

По таблиці критичних точок розподілу χ^2 при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ і числі степенів свободи $k = s - 3 = 13 - 3 = 10$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2(0{,}05:10) = 18{,}3$. Оскільки розраховане значення критерію більше ніж табличне, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності відкидаємо. За критерієм Романовського розходження теоретичних і емпіричних частот теж невипад-кове, оскільки частка $\left|\chi^2 - r\right| / \sqrt{2r}$ дорівнює 3,05.

3. Задачі для аудиторного розв'язування.

9.1. Обчислити коефіцієнт кореляції для наступної вибірки:

X	8	10	5	8	9
Y	1	3	1	2	3

9.2. Обчислити коефіцієнт кореляції, прямі регресії Y на X і X на Y за даними вибірки:

X	1	3	5	7	9	11
Y	40	36	30	24	20	12

9.3. Дана кореляційна таблиця для величин X та Y, де X- вхідний параметр системи, Y- вихідний параметр.

X\Y	7	12	15	16
2	5	6	0	1
4	2	3	3	0
6	0	0	3	8
8	0	0	5	1

Визначити коефіцієнт кореляції і рівняння ліній регресії.

9.4. За даними вибірки побудувати дискретний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ визначити правомірність прийнятої гіпотези:

а)

7	11	5	9	5	4	5	3	5	8	5	3	8	3	11	3	9	6	8	7
3	3	6	2	7	4	4	3	5	7	4	6	5	2	9	5	8	6	1	1
7	7	4	4	9	7	4	3	1	6	6	4	5	5	7	8	6	8	5	4
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6	8	4	5	6	5

б)

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	4	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	1

9.5. За даними вибірки побудувати неперервний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ визначити правомірність прийнятої гіпотези.

а)

19,5	20	22,5	20	22	21	20,4	21,5	21,3	22,1	21,4	21,4
22,1	21,5	21	20,2	19	24,8	21,5	23	20,8	20,2	21	21,2
20,4	21	25,5	25,2	25,5	20	19	21,6	20,5	24	21,3	23,5
21,6	21,7	25	23	23,4	21,3	22	22,3	22,5	24,3	25,6	21,5

б)

9,5	10	10	9,9	10	9,9	9,	10	10,3	10	10	9,6
9,8	10	9,8	9,6	10,1	10	10	10	9,9	10,2	9,7	10
10,3	9,7	10	10,3	10,5	10,1	10	10,4	10,2	10,2	10,6	9,8
9,6	10,2	10,3	10	10	9,5	9,9	9,8	10,5	10,4	9,5	9,6

4. Задачі для домашнього розв'язування

9.6. Обчислити коефіцієнт кореляції для наступної вибірки:

X	9	10	12	5	6
Y	6	4	7	3	2

9.7. Обчислити коефіцієнт кореляції, прямі регресії Y на X і X на Y за даними вибірки:

X	10	9	6	5	4	1
Y	24	28	30	26	40	46

9.8. За даними вибірки побудувати дискретний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ визначити правомірність прийнятої гіпотези.

а)

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	5	2	5	3	6	6
5	5	3	5	6	7	6	8	9	5	2	5	4	5	6	3	6	5	3	4
5	10	3	7	5	3	3	3	7	5	3	4	9	2	7	1	4	4	4	2

б)

6	6	5	6	11	8	7	4	4	4	8	3	2	3	9	7	6	9	5	8
8	7	10	8	6	9	9	10	3	10	5	4	6	8	9	9	3	8	4	11
4	6	9	2	8	4	7	7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8
2	3	8	8	7	6	9	4	6	7	6	9	5	6	4	7	8	9	9	8

9.9. За даними вибірки побудувати неперервний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ визначити правомірність прийнятої гіпотези:

а)

24	20	21.5	23.5	20.5	20	19.6	22.5	21	19.5	22.5	20
19.5	21	26	21	22.3	22	20.5	22.6	20.7	22.2	19.5	23
23.6	20.6	23.7	22.1	21.5	22.6	21	19.5	20.6	23.5	20	22
21.5	20	21	24	20.5	21.5	20	23.4	21.5	23.6	21.4	23

б)

13	28.2	24.1	14.9	22.4	23.9	18.8	17.6	14.0	13.1	23.8	17.6
24	24.8	23.3	26.0	14.1	14.6	18.2	27.6	24.2	13.8	25.6	13.8
17	16.4	17.8	16.4	27.7	31.1	22.9	17.1	21.7	27.7	30.5	19.2
15	17.8	17.5	18.6	17.3	19.1	12.8	12.8	27	24	17.8	22.1

5. Задачі підвищеної складності

9.10. Відомо, що для деякої вибірки $D_X^* = 16,\ D_Y^* = 9$. Яке найбільше значення коваріації?

<u>Практичне заняття №10</u>
Додаткові задачі

Додаткові задачі включають в себе завдання із теорії нечітких множин та теорії інформації, як областей, що використовують результати теорії ймовірностей та мають прикладний характер.

10.1. В двох урнах є по 20 кульок, причому в першій урні 5 червоних, 7 білих і 8 чорних, в другій – відповідно – 6, 8, 6. З кожної урни виймається по одній кульці. Визначити, для якої із урн результат досліду є більш визначеним.

10.2 Ймовірність появи події при одному досліді p. При якому p результат досліду є найбільш невизначеним?

10.3. Визначити ентропію випадкової величини, що має біноміальний розподіл: а) в загальному випадку; б) при $n = 2,\ p = q = 0{,}5$.

10.4. Ймовірність появи події А в одному досліді дорівнює p. Досліди повторюються до першої появи події А. Знайти ентропію числа дослідів і вияснити характер зміни ентропії із зміною p.

10.5. Знайти ентропію системи n випадкових величин, що мають нормальний розподіл.

10.6. Символи алфавіту азбуки Морзе можуть з’явитися в повідомленні з ймовірностями: для крапки – 0,51, для тире – 0,31, для проміжку між буквами – 0,12, для проміжку між словами – 0,06. Визначити середню кількість інформації в повідомленні із 500 символів даного алфавіту, вважаючи, що зв’язок між послідовними символами відсутній.

10.7. Проект буде фінансуватися з чотирьох джерел, про які відомо наступне:

1. Джерело А абсолютно надійне і стабільне, сума фінансування складе 120 грошових одиниць (гр.од.).

2. Джерело Б надійне, сума фінансування складе від 150 до 220 гр.од., причому більш ймовірно від 180 до 200 гр.од.
3. Джерело В ненадійне, більш ймовірно, що проект профінансує у сумі від 50 до 100 гр.од. Якщо це трапиться, то найбільша впевненість є в одержанні суми від 70 до 80 гр.од. Але можливий випадок, що проект джерело В взагалі фінансувати не буде.
4. Джерело Г ненадійне і нестабільне. Більш ймовірно, що проект фінансувати не буде, а якщо і буде, то у сумі від 30 до 40 гр. од., причому ймовірність одержання грошей спадає по мірі росту суми.

Використовуючи методи теорії нечітких множин та, формалізувавши задачу, методи теорії ймовірностей, визначити, яка сума найбільш ймовірно буде одержана (для теорії нечітких множин правильно буде сказати про впевненість в одержанні грошей).

Програма курсу
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Вступ. Історичний розвиток теорії ймовірностей. Задачі, для розв'язку яких необхідно застосовувати ймовірностні методи. Використання методів теорії ймовірностей для вивчення засобів обчислювальної техніки.

Основні положення теорії ймовірностей. Випадкова подія, достовірна та неможлива подія, протилежна подія, повна група подій, несумісні події. Класична формула ймовірності, елементи комбінаторики (перестановки, розміщення та сполучення). Аксіоматичне визначення ймовірності. Ймовірність протилежної події.Геометричні ймовірності, задача Бюффона.

Теореми додавання та множення ймовірностей. Теорема додавання ймовірностей. Умовна ймовірність події, теорема множення ймовірностей. Композиція дослідів. Поняття ентропії як міри невизначеності. Елементи математичної теорії зв'язку.

Формула повної ймовірності та формула Байєса. Формула повної ймовірності. Апріорні та апостріорні ймовірності, теорема гіпотез (формула Байеса).

Випадкові величини. Поняття випадкової величини, приклади. Закони розподілу випадкових величин. Ряди розподілу, многокутник розподілу, функція розподілу випадкової величини, її властивості. Ймовірність попадання на відрізок, ймовірність окремого значення. Функція розподілу дискретної величини, індикатор події. Неперервна випадкова величина, щільність розподілу. Змішані випадкові величини. Алгоритми генерації випадкових чисел.

Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання дискретної та неперервної випадкової величини, мода та медіана. Моменти, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Асиметрія та ексцес. Властивості числових характеристик. Твірна функція випадкової величини. Надійність елементів системи при змінному часі роботи.
Неперервні та дискретні розподіли. Біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, потік подій, геометричний та гіпергеометричний розподіли. Рівномірний розподіл, показниковий розподіл, нормальний розподіл
Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Нормальний розподіл як наближення біноміального. Теорема Бернуллі, локальна та інтегральна теореми Лапласа
Закон великих чисел. Теореми Чебишева, Маркова, Бернуллі, центральна гранична теорема
Системи випадкових величин. Закон розподілу двух дискретних випадкових величин, функція розподілу, її властивості. Щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини, її властивості. Умовні закони розподілу складових випадкових величин. Числові характеристики.
Основні поняття математичної статистики. Предмет і задачі математичної статистики. Емпірична функція розподілу, варіаційний ряд, гістограма, полігон частот.
Оцінки числових характеристик випадкових величиною. Точкові оцінки. Інтервальні оцінки. Оцінка ймовірності за частотою
Перевірка статистичних гіпотез. Критерій згоди Пірсона. Перевірка гіпотези про розподіл генеральної сукупності.
Лінійна кореляція. Регресія.
Т**еорія ймовірностей і теорія нечітких множин.**

ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1987 г.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975 г.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988 г.
4. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991 г.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Том 2. – М.: Высшая школа, 1986 г.
6. Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика. Т.3. Под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1990 г.

7. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). – М.:Наука, 1969 г.
8. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. - М.:Высшая школа, 1989 г.
9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функцый. Под ред. А.А.Свешникова. – М.: Наука, 1970 г.
10. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1969 г.
11. Бугір М.К. Теорія ймовірності та математична статистика. – Тернопіль.: Підручники&Посібники, 1998 р.