МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Затверджено
на засіданні кафедри комп'ютерних технологій
протокол № ______ від "____"______________

Тираж 100 прим.

Вимогам, що ставляться до
навчально-методичних видань,
відповідає
Зав. кафедри __________________А.А.Тимченко

Методичні вказівки

до лабораторних робіт
з курсу
ЙМОВІРНОСТНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА В АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМАХ
для студентів спеціальностей 7.080401, 7.080403
денної форми навчання

Весь цифровий і фактичний матеріал та бібліографічні
відомості перевірено. Зауваження рецензента враховано

Зав. кафедри ______________________________
Укладач: _________________________________
Відповідальний редактор____________________
Рецензент ________________________________

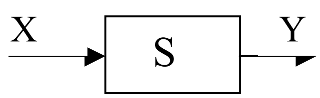
Черкаси ЧІТІ 2000 рік

За формою прояву причинно-наслідкових зв'язків закони природи і суспільства діляться на два класи: детерміновані та статистичні. Не всі явища макросвіту піддаються точним прогнозам, незважаючи на те, що наші знання про них все більше поглиблюються і уточнюються. Так, зміни клімату, зміна погоди не є об'єктами для успішного прогнозування. Згідно статистичних законів, майбутній стан систем можна визначити не однозначно, а лише з деякою ймовірністю, що є об'єктивною мірою закладених в минулому тенденцій до змін. Прояв випадковості в суспільно-економічних процесах відбувається як в позитивну, так і в негативну сторону, що надалі обумовлює істотні зміни самого ходу подій. З розвитком суспільства народне господарство весь час ускладнюється і згідно законів розвитку динамічних систем посилюється і статистичний характер законів, що описують соціально-економічні явища. Все це визначає необхідність оволодіння статистичними методами як інструментом аналізу і прогнозування.

Лабораторна робота №1

***Тема*: Використання табличних процесорів в елементарних статистичних розрахунках**
***Мета:* Навчитись використовувати табличні процесори для побудови статистичних графіків та діаграм і виконання статистичних розрахунків.**

Нехай S – складна технічна система, що реалізує перетворення $X \to Y$, де X - вхідні потоки різноманітної природи, Y - вихідні характеристики. Без обмеження загальності будемо вважати X та Y одномірними векторами і нехай $T = \{t_1 < t_2 < ... < t_n\}$ - проміжок часу, протягом якого проводились спостереження, $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$.



Постановка задачі.

Побудувати кореляційну таблицю характеристик X та Y, обчислити їх вибіркові характеристики, надійні інтервали для генерального середнього, перевірити гіпотези про нормальний розподіл характеристики Y, побудувати графік прямої лінії регресії X на Y.

Вибірки X та Y згідно свого варіанту визначити із таблиці 29, або за вказівкою викладача, використовуючи табличний процесор Excel, промоделювати їх із заданими параметрами. Оскільки об'єм вибірок великий (n=100), то необхідно скласти інтервальний варіаційний ряд.

Алгоритм роботи.

1.1. Визначити розмах вибірок $d_x = x_{\max} - x_{\min}$, $d_y = y_{\max} - y_{\min}$.

1.2. Поділити інтервали $(x_{\min}, x_{\max})$, $(y_{\min}, y_{\max})$ на $m \approx 1 + 3{,}33 \lg n = 8$ (число Стерджесса) проміжків. При цьому необхідно, щоб кінці проміжків були цілими (округленими) числами. Довжини проміжків позначимо h_x, h_y.

1.3. Складемо інтервальний варіаційний ряд (таблиця 1)

Таблиця 1

Інтервал	n_i	n_i/n	n_i/nh	Середина інтервалу

де n_i – кількість значень, що попали в i-й інтервал.

1.4. Побудувати полігони частот вибірок і гістограми відносних частот

1.5. Скласти кореляційну таблицю двовимірної вибірки (X,Y) (таблиця 2)

Таблиця 2

X\Y			……..		N_x
…….	……..	……..	……..	………	………
N_y			……..		

де $N_x^i = n_x^i$, $N_y^i = n_y^i$.

1.6. Для обчислення числових характеристик вибірки скласти розрахункову таблицю, де за уявний нуль C виберемо варіанту з найбільшою частотою, $U_i = \dfrac{X_i - C}{h}$ (таблиця 3).

Таблиця 3

X_i	N_i	U_i	$U_i \cdot N_i$	$U_i^2 N_i$	$U_i^3 N_i$	$U_i^4 N_i$	$(U_i + 1)^4 N_i$
Сума							

1.7. Обчислити вибіркові (початкові) моменти:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum U_i N_i, \quad M_2^* = \frac{1}{n}\sum U_i^2 N_i, \quad M_3^* = \frac{1}{n}\sum U_i^3 N_i, \quad M_4^* = \frac{1}{n}\sum U_i^4 N_i.$$

1.8. Обчислити вибіркові центральні моменти:

$$\mu_2 = \left(M_2^* - M_1^{*2}\right) * h^2, \quad \mu_3 = \left(M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2M_1^{*3}\right) * h^3,$$

$$\mu_4 = \left(M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^* M_1^{*2} - 3M_1^{*4}\right) * h^4.$$

1.9. Обчислити вибіркове середнє: $X_в = M_1^* * h + C$, вибіркову дисперсію: $D_в = \mu_2$, виправлену вибіркову дисперсію: $S_X^2 = \frac{n}{n-1} * \mu_2$, вибіркове стандартне відхилення: $S_X = \sqrt{S_X^2}$.

1.10. Обчислити вибірковий коефіцієнт асиметрії: $a_S = \frac{\mu_3}{S_X^3}$, вибірковий коефіцієнт ексцесу: $e_K = \frac{\mu_4}{S_X^4} - 3$.

1.11. Аналогічно обчислити числові характеристики для вибірки *Y*.

1.12. Обчислити групову середню та групову дисперсію, для чого заповнити таблиці 4 і 5.

Таблиця 4

$Y \parallel X$	X_1	…………	X_n
……………………	…………	…………	……………………
N_X			
$\sum N_{XY} Y$			
$\sum N_{XY} Y^2$			
$Y_X = \frac{\sum N_{XY} Y}{N_X}$			
$D_{грх} = \frac{\sum N_{XY} Y^2}{N_X} - Y_X^2$			

Таблиця 5

N_X	Y_X	$D_{грх}$	$N_X Y_X$	$N_X Y_X^2$	$N_X D_{грх}$
………	……	……………	…………	…………	…………
Сума	-	-			

1.13. Обчислити загальне середнє $Y_в = \frac{\sum N_X Y_X}{n}$, внутрішньогрупову дисперсію $D_{внгр} = \frac{\sum N_X D_{грх}}{n}$, міжгрупову дисперсію $D_{мжгр} = \frac{\sum N_X Y_X^2}{n} - Y_в^2$.

1.14. Перевірити правило розкладу загальної дисперсії. Для цього обчислити суму $D_{внгр} + D_{мжгр}$, яка повинна бути близькою до $D_в$.

1.15. Підрахувати надійний інтервал для генерального середнього: $X_6 - \frac{tS_X}{\sqrt{n}} < \mu < X_6 + \frac{tS_X}{\sqrt{n}}$, де t шукаємо в таблиці при α=*0,95* і *n=100*.

1.16. Підрахувати надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення: $S_X(1-q) < \sigma < S_X(1+q)$, де q – шукаємо в таблиці при α=*0,95* і *n=100*.

1.17. Розрахувати теоретичні частоти, вважаючи параметри нормального розподілу відомими і рівними їхнім оцінкам за вибіркою $X_в$ і S_X. Результати обчислень занести в таблицю 6.

Таблиця 6

i	X_i	$\frac{X_i + X_{i+1}}{2}$	X_{i+1}	Z_i	Z_{i+1}	$\Phi(Z_i)$	$\Phi(Z_{i+1})$	P_i	n'_i	n_i
…	….	………..	…..	…	…..	…….	………	…..	…	…….

1.18. Побудувати графіки теоретичних та вибіркових частот.

1.19. Обчислити значення $X^2_{спост}$, для чого скласти таблицю 7. Якщо частота попадання в інтервал менша, ніж 5, то такий інтервал об‘єднуємо з іншим.

Таблиця 7

i	n_i	n'_i	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
…….	……	…….	……
$X^2_{спост}=$			Σ

Оскільки за вибіркою оцінюється два параметри нормального розподілу, то кількість степенів свободи $k = m - 3$, де m – кількість інтервалів.

1.20. Для рівня значущості $\alpha=0,05$ і k степенів свободи знаходимо критичне значення $X^2_{кр}$. Якщо $X^2_{спост}<X^2_{кр}$, то гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності не відхиляється.

1.21. Обчислити вибіркове кореляційне відношення: $\eta = D_{мжгр} / D_{заг}$.

1.22. Для обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції перейти до умовних варіант, поклавши: $U_i=(X_i-C_X)/h_X$, $V_i=(Y_i-C_y)/h_y$.

1.23. Розрахунки занести в таблицю 8.

Таблиця 8

V/U	U_1	U_2	…….	U	$U=\Sigma N_{UV}V$	U_V
V_1						
V_2						
…..						
$V=\Sigma N_{UV}V$						$\sum U_V$
V_U					$\sum V_U$	

1.24. Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$R_в = \frac{\left(\sum U_V\right)h_x h_y - n\left(X_в - C_x\right)\left(Y_в - C_y\right)}{nS_x S_y}.$$

1.25. Перевірити гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта кореляції. Для цього обчислити статистику: $Z^*_{стат} = \sqrt{n-k} * \ln\left(\left(1+R_в\right)/\left(1-R_в\right)\right)/2$.

1.26. За таблицею функції Лапласа і заданим рівнем значущості $\alpha=0,05$ знай - ти критичну точку $Z_{кр}$.

1.27. Порівняти $Z^*_{спост}$ і $Z_{кр}$. Якщо $Z^*_{спост} > Z_{кр}$, то гіпотеза про рівність нулю коефіцієнта кореляції відхиляється.

1.28. Обчислити статистику: $Z_{спост} = \frac{\ln\left(\left(1+R_в\right)/\left(1-R_в\right)\right)}{2} - \frac{R_в}{2*\left(n-1\right)}$, знайти $\Delta = \frac{Z_{кр}}{\sqrt{n-k}}$, обчислити статистики: $Z_{нижн}=Z_{спост}-\Delta$, $Z_{верх}=Z_{спост}+\Delta$. і значення гіперболічного тангенса у відповідних точках $thz_{нижн}=(e^{z_{нижн}} - e^{-z_{нижн}})/(e^{z_{нижн}} + e^{-z_{нижн}})$, $thz_{верх}= (e^{z_{верх}} - e^{-z_{верх}})/(e^{z_{верх}} + e^{-z_{верх}})$. Отже, надійний інтервал, який накриває справжнє значення коефіцієнта кореляції з ймовірністю 0.95 задається нерівністю $thz_{нижн} < \rho < thz_{верх}$.

1.30. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X, що має вигляд:

$$y - y = R_b \frac{s_y}{s_x}(x - x_b).$$

1.31. Для обчислення залишкової дисперсії будуємо таблицю 9.

Таблиця 9

Y_X	X	$Y(X)$	N_X	$Y_X - Y(X)$	$(Y_X - Y(X))^2 N_X$
……….	…………..	………..	………	………..	………….
				Сума	=

1.32. Залишкову дисперсію обчислити за формулою

$$s^2_{зал} = \frac{1}{n}\sum(Y_X - Y(X))^2 N_X .$$

1.33. Перевірити значущість оцінок коефіцієнтів рівняння регресії, вважаючи, що генеральна сукупність має нормальний розподіл, для чого обчислити стандартні похибки оцінок коефіцієнтів b_i: $s_{b_0} = s^2_{зал}/\sqrt{n-2}$, $s_{b_1} = s^2_{заг}/(\sqrt{(n-2)s_x}$.

1.34. Обчислити статистики $T_{спост0} = b_0 / s_{b_0}$, $T_{спост1} = b_1 / s_{b_1}$.

1.35. За рівнем значущості 0.05 і кількістю степенів свободи n-2 за таблицею критичних точок розподілу Ст'юдента знайти $t_{кр}$. Якщо $T_{спостi} > t_{кр}$, то нульові гіпотези відхилити.

1.36. За таблицею знайти t=t(0.95;n-2). Тоді надійні інтервали, що накривають справжні значення коефіцієнтів регресії з ймовірністю 0.95 визначаються нерівностями: $b_0 - ts_{b_0} < \beta_0 < b_0 + ts_{b_0}$, $b_1 - ts_{b_1} < \beta_1 < b_1 + ts_{b_1}$

1.37. В системі координат на площині побудувати точки, які відповідають вибірковим оцінкам умовних середніх ознаки Y при відповідних значеннях ознаки X і графік прямої лінії регресії Y на X.

Зразок виконання лабораторної роботи №1

Маємо початкові дані (див. таблицю 10): Таблиця 10

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	24	32,9	27,6	21,8	30,5	39,4	19,9	31,4	32,8	25,3	37	17	25,1	29,5	20,3	28,6	30,1	20,3	26,7	27
Y	118	176	124	103	164	218	112	178	190	135	235	99	144	122	95	153	185	78	157	140
Номер	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
X	18	17,3	33,8	35,4	39,8	16,2	26,8	24,4	24,5	35,6	38,9	28,8	26,9	21,7	19,3	20,9	27,1	26,6	24,5	23,7
Y	90	103	205	194	228	87	143	139	139	195	204	150	141	102	97	101	170	175	139	108
Номер	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
X	26,7	30,7	30,5	28,4	15,1	21,2	23,1	28,6	24,4	22,1	23,4	13,3	16,8	28,4	17,3	28,3	31,2	21,2	14,9	35,3
Y	166	192	165	176	73	99	127	144	103	119	123	89	73	151	103	180	194	125	71	196
Номер	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
X	27,9	21,4	31,4	30,1	34,6	37,5	36,9	36,5	29	27	14,7	22,7	32	14,2	37,2	32,7	19,8	22,1	26,6	22,1
Y	166	127	178	195	197	231	196	228	161	133	75	117	188	71	251	192	81	112	141	121
Номер	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
X	32,7	29,9	32,6	18,5	37,5	32,7	17,5	36,9	36	36,3	27,6	24,1	27,8	26,7	22,8	41,1	28,3	16,2	32,8	30,5
Y	192	172	170	126	236	179	89	196	208	220	158	136	150	103	93	216	179	85	176	171

Таблиця 11

Інтервал	Ni	Ni/N	Ni/Nh	Середина інтервалу
69..92	12	0,12	0,06	80,5
92..115	15	0,15	0,075	103,5
115..138	14	0,14	0,07	126,5
138..161	15	0,15	0,075	149,5
161..184	18	0,18	0,09	172,5
184..207	16	0,16	0,08	195,5
207..230	6	0,06	0,03	218,5
230..253	4	0,04	0,02	241,5
Сума	100	1	0,5	

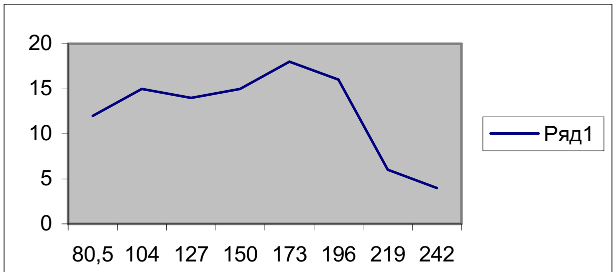


Рис.1. Полігон частот вибірки X

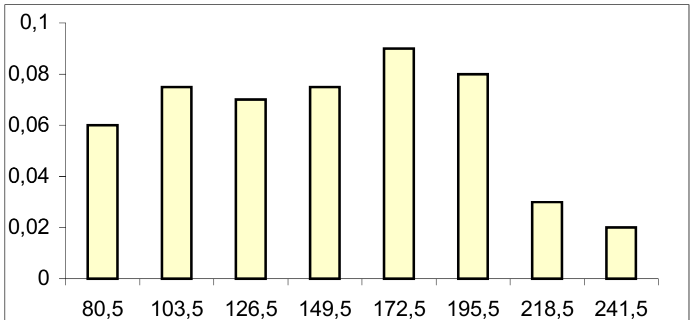


Рис.2 Гістограма відносних частот вибірки X

Таблиця 12

Інтервал	Ni	Ni/N	Ni/Nh	Середина інтервалу
11,2..15,2	5	0,05	0,025	13,2
15,2..19,2	11	0,11	0,055	17,2
19,2..23,2	17	0,17	0,085	21,2
23,2..27,2	23	0,23	0,115	25,2
27,2..31,2	24	0,24	0,12	29,2
31,2..35,2	13	0,13	0,065	33,2
35,2..39,2	4	0,04	0,02	37,2
39,2..43,2	3	0,03	0,015	41,2
Сума	100	1	0,5	

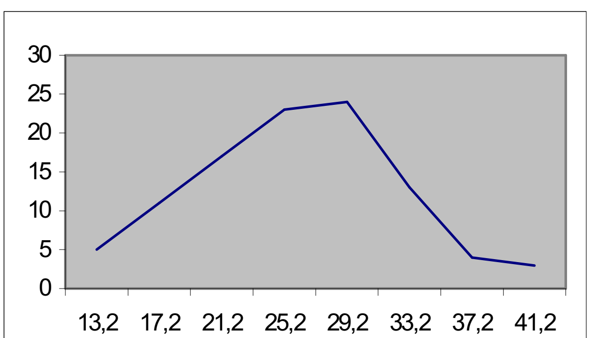


Рис.3. Полігон частот вибірки Y

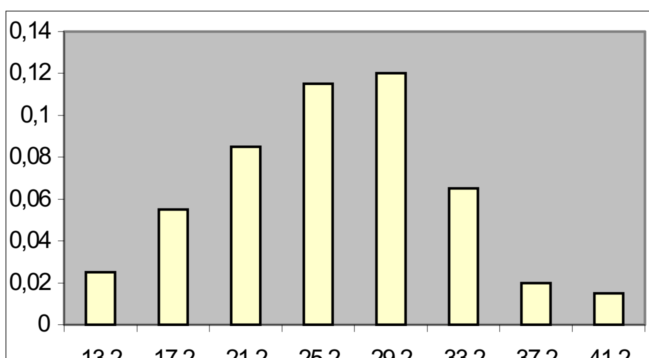


Рис.4 Гістограма відносних частот вибірки Y

Об'єм вибірки X великий (n=100), також велика кількість різних варіант, тому складемо інтервальний варіаційний ряд. За вибіркою знаходимо $X_{мін}$=71, $X_{мах}$=251. Розмах вибірки дорівнює $X_{мах}$- $X_{мін}$=180. Якщо поділити інтервал ($X_{мін,}$ $X_{мах}$) на $m \approx 1 + 3{,}33 \lg n = 8$ проміжків, то їхні кінці не будуть цілими числами. Щоб кінці інтервалів були цілими числами, доцільно вважати, що $X_{мін}$=69, $X_{мах}$=253. Тоді довжина інтервалів дорівнює h_x=23. Складемо інтервальний варіаційний ряд. (таблиця 11)

За вибіркою Y знаходимо Y_{min}=13,3, Y_{max}=41,1. Для того щоб довжини інтервалів були цілим числами h=4, доцільно взяти Y_{min}=11,2, Y_{max}=43,2. Тоді при m=8 будемо мати таблицю 12.

Складемо кореляційну таблицю 13 двовимірної вибірки (X,Y)

Таблиця 13

Y\X	69-92	92-115	115-138	138-161	161-184	184-207	207-230	230-259	Ny
11,2-15,2	5								5
15,2-19,2	7	4							11
19,2-23,2		11	6						17
23,2-27,2			8	15					23
27,2-31,2					18	6			24
31,2-35,2						10	3		13
35,2-39,2							3	1	4
39,2-43,2								3	3
Nx	12	15	14	15	18	16	6	4	100

Для обчислення числових характеристик вибірки X складемо розрахункову таблицю 14, де за уявний нуль вибрано варіанту C=172.5. Останній стовпець введемо для контролю обчислень.

Таблиця 14

4						
Ni	Ui	Ui*Ni	Ui^2*Ni	Ui^3*Ni	Ui^4*Ni	(Ui+1)^4*Ni
12	-4	-48	192	-768	3072	972
15	-3	-45	135	-405	1215	240
14	-2	-28	56	-112	224	14
15	-1	-15	15	-15	15	0
18	0	0	0	0	0	18
16	1	16	16	16	16	256
6	2	12	24	48	96	486
4	3	12	36	108	324	1024
100		-96	474	-1128	4962	3010

Обчислимо умовні вибіркові моменти

M^*_1=-96/100=-0.96, M^*_2=474/100=4.74, M^*_3=-1128/100=-11.28, M^*_4=4962/100= =49.62. Тоді вибіркові центральні моменти дорівнюють:

$\mu_2=(4.74-(-0.96)^2)23^2=2019.9$, $\mu_3=(-11.28-3*4.74*(-0.96)+2(-0.96)^3)*23^3=7321.2$

$\mu_4=(49.62-4*(-11.28)*(-0.96)+6*4.74*(-0.96)^2-3*(-0.96)^4)*23^4=9841815.4$

Отже вибіркове середнє дорівнює: $x_в=-0.96*23+172.5=150.42$, а вибіркова дисперсія - $D_в=\mu_2=2019.9$. Тоді виправлена вибіркова дисперсія дорівнює $s^2_x=100*2019.9/99=2040.3$, а вибіркове стандартне відхилення – $s_x=\sqrt{2040.3}=45.2$.

Вибірковий коефіцієнт асиметрії дорівнює $a_s=7321.2/45.2^3=0.08$, а вибірковий коефіцієнт ексцесу - $e_к=9841815.4/45.2^4-3=-0.64$.

Аналогічно, для вибірки Y маємо

$y_b=26$, $s^2_y=42.34$, $s_y=6.5$, $a_s=0.07$, $e_x=0.01$.

Обчислимо групову середню та групову дисперсію (таблиця 15).

Таблиця 15

Таблиця 5								
Y\X	80,5	103,5	126,5	149,5	172,5	195,5	218,5	241,5
13,2	5							
17,2	7	4						
21,2		11	6					
25,2			8	15				
29,2					18	6		
33,2						10	3	
37,2							3	1
41,2								3
Nx	12	15	14	15	18	16	6	4
сумау(NxyY)	186,4	302	328,8	378	525,6	507,2	211,2	160,8
сумау(NxyY^2	2942,08	6127,2	7776,96	9525,6	15347,52	16138,24	7458,24	6476,16
Yx	15,53333	20,13333	23,48571	25,2	29,2	31,7	35,2	40,2
Dгрх	3,888889	3,128889	3,918367	0	0	3,75	4	3

Для обчислення внутрігрупової і міжгрупової дисперсії складемо таблицю 16.

Таблиця 16

Nx	Yx	Dгрх	NxYx	NxYx^2	NxDгрх
12	15,5	3,9	186	2883	46,8
15	20,1	3,1	301,5	6060,15	46,5
14	23,5	3,9	329	7731,5	54,6
15	25,2	0	378	9525,6	0
18	29,2	0	525,6	15347,52	0
16	31,7	3,75	507,2	16078,24	60
6	35,2	4	211,2	7434,24	24
4	40,2	3	160,8	6464,16	12
Сума			2599,3	71524,41	243,9

Тоді загальне середнє дорівнює Yb=2599.3/100=26.
Внутрігрупова дисперсія дорівнює $D_{внгр}$=243.9/100=2.4,
Міжгрупова дисперсія – $D_{мжгр}$=71524.41/100-26^2=715.2-676=39.2.

Перевіримо правило розкладання загальної дисперсії.
Обчислимо суму $D_{внгр}$+ $D_{мжгр}$=2.4+39.2=41.6.
Вона лише на 0.28 менша, ніж обчислена вище вибіркова дисперсія $D_в$=41.92.

За таблицею t=t(0.95;100)=1.984, тому гранична похибка вибіркового середнього $\Delta = t\delta = ts_x / \sqrt{n} = 1.984 * 45.2 / 10 = 8.97$ і надійний інтервал для генерального середнього ознаки X з ймовірністю 0.95 має вигляд: 150.42-8.97<μ<150.42+8.97, або 141.45<μ<159.39.

За таблицею q=q(0.95;100)=0.143. Тому надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення ознаки X з ймовірністю 0.95 має вигляд: 45.2*(1-0.143)<σ<45.2*(1+0.143) або 38.44<σ<51.66.
Критерій згоди Пірсона.

За виглядом полігона частот робимо припущення про нормальний розподіл ознаки X. Розрахуємо теоретичні частоти, вважаючи параметри нормального розподілу відомими і рівними їхнім оцінкам за вибіркою: $\mu = x_b = 150.42; \sigma = s_x = 45.2$. Теоретичні ймовірності p_i попадання випадкової величини X в інтервали (x_i;x_{i+1}) дорівнюють p_i=Ф(z_{i+1})-Ф(z_i), де Ф(x)-функція Лапласа.

Результати обчислень заносимо в таблицю 17
Обчислюємо значення $X^2_{спост}$, для чого складемо розрахункову таблицю, де об'єднано останніх два інтервали.
За вибіркою оцінювали два параметри нормального розподілу: μ i σ, тому кількість степенів свободи k=m-r-1=7-2-1=4.

Для рівня значущості α=0.05 і k=4 степенів свободи за таблицею знаходимо критичне значення $X^2_{кр}$=9.49. Оскільки $X^2_{спост}$< $X^2_{кр}$, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності не відхиляємо.

Вибіркове кореляційне відношення η = $D_{мжгр}$/$D_{заг}$=39.2/41.92=0.94. Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції. Перейдемо до умовних варіант, поклавши U_i=(x_i-C_x)/h_x, V_i=(y_i-C_y)/h_y, де C_x=20, C_y=29.2, h_x=23, h_y=4.

Розрахунки заносимо у таблицю 19.

Вибірковий коефіцієнт кореляції дорівнює

R_b=382*23*4-100*(105.42-172.5*(26-29,2))/(100*45.2*6,5=0,956.

Перевіримо гіпотезу H_0:r=0 про рівність нулю коефіцієнта кореляції генеральної сукупності при альтернативній гіпотезі H_1:r<>0. Обчислимо статистику $Z^*_{спост}=\sqrt{97}*\ln((1+0.956)/(1-0,956))/2=18.78$.

За таблицею Лапласа і заданим рівнем значущості $\alpha=0.05$ знаходимо

Таблиця 17

Xi	(Xi+Xi+1)/2	Xi+1	Zi	Zi+1	Ф(Zi)	Ф(Zi+1)	Pi	N'i	Ni
69	80,5	92	*-неск-ть	-1,29248	-0,5	-0,401	0,099	9,9	12
92	103,5	115	-1,29248	-0,78363	-0,401	-0,282	0,119	11,9	15
115	126,5	138	-0,78363	-0,27478	-0,282	-0,106	0,176	17,6	14
138	149,5	161	-0,27478	0,234071	-0,106	0,09	0,196	19,6	15
161	172,5	184	0,234071	0,74292	0,09	0,27	0,18	18	18
184	195,5	207	0,74292	1,25177	0,27	0,394	0,124	12,4	16
207	218,5	230	1,25177	1,760619	0,394	0,46	0,066	6,6	6
230	241,5	253	1,760619	*+неск-ть	0,46	0,5	0,04	4	4
							1	100	

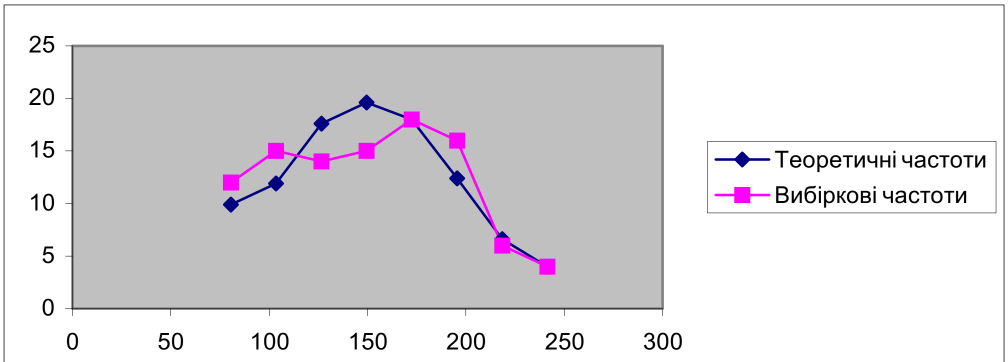


Рис. 5

критичну точку $z_{кр}$=1,96. Оскільки $Z^*_{спост}> z_{кр}$, то висунута гіпотеза про рівність нулю коефіцієнта кореляції генеральної сукупності не узгоджується з даними, які спостерігаються, тому вона відхиляється.

Таблиця 18

i	Ni	N'i	(Ni-N'i)^2/N'i
1	12	9,9	0,4454545
2	15	11,9	0,807563
3	14	17,6	0,7363636
4	15	19,6	1,0795918
5	18	18	0
6	16	12,4	1,0451613
7	6	6,6	0,03
8	4	4	
X^2спост=			4,1441343

Обчислимо статистику $Z_{спост}$=ln((1+0.956)/(1-0.956))/2-0.956/(2*99)=1.892. Знаходимо $\Delta=1.96/\sqrt{97}=0.2$. Обчислимо статистики $z_{нижн}$=1.892-0.2=1.692, $z_{верх}$=1.892+0.2=2.092 і значення гіперболічного тангенса у відповідних точках $thz_{нижн}=(e^{1.692}-e^{-1.692})/(e^{1.692}-e^{-1.692})=0.9344$, $thz_{верх}=(e^{2.092}-e^{-2.092})/(e^{2.0.92}-e^{-2.092})=$ =0.97. Отже, надійний інтервал, який накриває справжнє значення коефіцієнта кореляції з ймовірністю 0.95 задається нерівністю $0.93<\rho<0.97$.

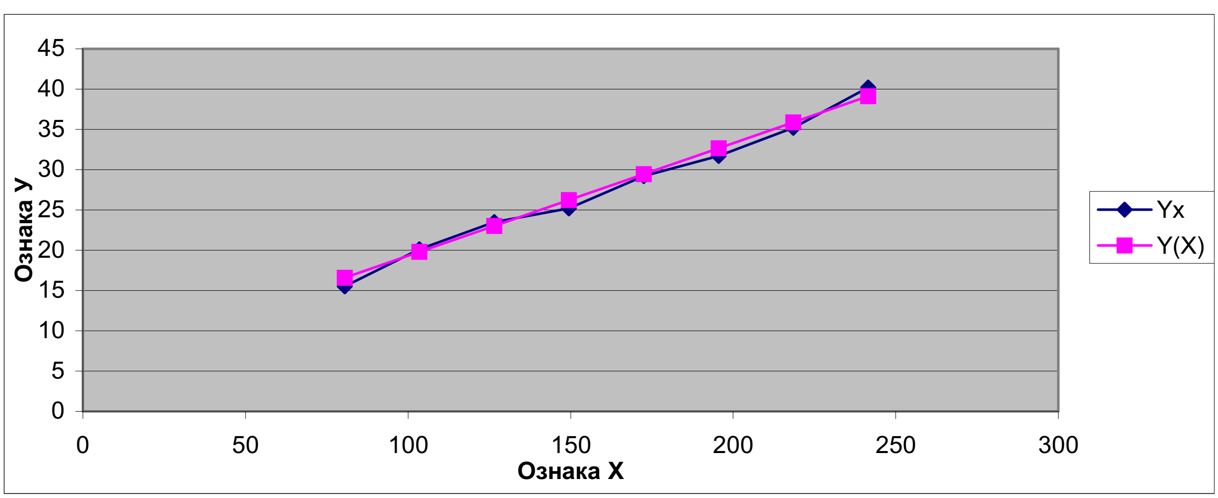
Таблиця 19

v\u	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	U=сума(N	Uv
-4	5								-20	80
-3	7	4							-40	120
-2		11	6						-45	90
-1			8	15					-31	31
0					18	6			6	0
1						10	3		16	16
2							3	1	9	18
3								3	9	27
V=сума(NuvV)	-41	-34	-20	-15	0	10	9	11	сума	382
Vu	164	102	40	15	0	10	18	33	382	

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд

Таблиця 20

Yx	X	Y(X)	Nx	Yx-Y(X)	(Yx-Y(X))^2Nx
15,5	80,5	16,57	12	-1,07	13,7388
20,1	103,5	19,79	15	0,31	1,4415
23,5	126,5	23,01	14	0,49	3,3614
25,2	149,5	26,23	15	-1,03	15,9135
29,2	172,5	29,45	18	-0,25	1,125
31,7	195,5	32,67	16	-0,97	15,0544
35,2	218,5	35,89	6	-0,69	2,8566
40,2	241,5	39,11	4	1,09	4,7524
				сума=	58,2436



y-26=0.956*6.5/45.2(x-150.42), або y=0.14x+5.3

$0.14-1.985*0.01<\beta_1<0.14+1.985*0.01$, або $0.02<\beta_1<0.26$.

В системі координат на площині побудуємо точки, які відповідають вибірковим оцінкам умовних середніх ознаки Y при відповідних значеннях ознаки X і графік прямої лінії регресії Y на X.

Для обчислення залишкової дисперсії складемо таблицю 20

Залишкова дисперсія дорівнює $s^2_{зал}$=58.2436/100=0.58.

Перевіримо значущість оцінок коефіцієнтів рівняння регресії, вважаючи, що генеральна сукупність має нормальний розподіл. Обчислимо стандартні похибки оцінок коефіцієнтів b_i: $S_{b0}=0.58/\sqrt{98}=0.06$, $S_{b1}=0.58/(\sqrt{(98*45.2)})=0.01$.

Обчислимо статистики: $T_{спост0}=5.3/0.06=88.3$, $T_{спост1}=0.14/0.01=14$.

За рівнем значущості 0.05 і кількістю степенів свободи 98 за таблицею критичних точок розподілу Ст'юдента знаходимо $t_{кр}=1.99$. Оскільки $T_{спостi}>t_{кр}$, то нульові гіпотези відхиляємо. За таблицею знаходимо t=t(0.95;98)= =1.985. Тоді надійні інтервали, що накривають справжні значення коефіцієнтів регресії з ймовірністю 0.95 визначаються нерівностями

$5.3-1.985*0.06<\beta_0<5.3+1.985*0.06$, або $5.18<\beta_0<5.42$

Контрольні запитання.

1. Основні поняття вибіркового методу.
2. Статистичні властивості оцінок.
3. Точкові оцінки математичного сподівання та дисперсії.
4. Емпірична функція розподілу, гістограма, полігон частот.
5. Метод максимальної правдоподібності.
6. Довірчі інтервали для математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення.
7. Перевірка статистичних гіпотез.
8. Критерії Пірсона, Колмогорова і Романовського.
9. Основні поняття кореляційного аналізу.
10. Парна та множинна кореляція.
11. Регресійні моделі як інструмент аналізу та прогнозу.

Лабораторна робота № 2

Тема: **Дисперсійний аналіз. Дисперсійна модель. Визначення наявності чи відсутності впливу на результуючий фактор одного якісного фактора.**

Мета: **Навчитись аналізувати результати, що залежать від дії якісних факторів.**

Дисперсійним аналізом (ДА) називають статистичний метод аналізу результатів, що залежать від дії якісних факторів. ДА може бути викорис-таний для виявлення сумісного впливу факторів, що не можна виміряти кіль-кісно, на результуючий фактор. Сутність методу полягає у тому, що загальна варіація результуючого показника поділяється на частини, що відповідають роздільному та сумісному впливу різних якісних факторів, і залишкову варіацію, що акумулює вплив усіх неврахованих факторів. Статистичне вив-чення цих частин дозволяє робити висновки про те, чи дійсно здійснює вплив на результуючий показник той чи інший якісний фактор. Наприклад, у якості фактору може бути розглянута організація виробництва на різних виробничих дільницях, що оснащені приблизно однаковим обладнанням. Тоді відмінності у випуску продукції в розрахунку на одного працюючого визначаються відмінностями в способах організації виробництва на різних дільницях.

Постановка задачі

Розглядаємо вибіркове дослідження продуктивності праці робітників однієї професії, що обслуговують автоматизовані системи на однотипних підприємствах. Продуктивність праці виражена у відносних одиницях, по відношенню до базової, прийнятої за одиницю. Необхідно встановити, чи істотно відрізняються продуктивності праці робітників вказаної професії на підприємствах.

1. За допомогою таблиць 21 і 22 визначити номер свого варіанта і визначити свої дані за цим номером.

Таблиця 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}	y_{j4}	y_{j5}	y_{j6}	y_{j7}	y_{j8}	y_{j9}	y_{j10}
1,25	1,32	1,25	1,54	1,56	1,84	1,21	1,22	1,26	1,23
1,24	1,29	1,24	1,26	1,25	1,32	1,25	1,24	1,36	1,62
1,54	1,11	1,25	1,23	1,25	1,24	1,32	1,56	1,25	1,16

1,24	1,25	1,84	1,26	1,28	1,34	1,24	1,32	1,34	1,18
1,14	1,25	1,62	1,24	1,26	1,32	1,25	1,51	1,25	1,32
1,25	1,65	1,23	1,24	1,36	1,25	1,45	1,11	1,15	1,32
1,58	1,24	1,26	1,32	1,38	1,25	1,32	1,25	1,54	1,25
1,21	1,22	1,25	1,11	1,32	1,38	1,28	1,17	1,14	1,25
1,16	1,21	1,36	1,25	1,24	1,36	1,21	1,18	1,16	1,17
1,25	1,24	1,26	1,27	1,28	1,26	1,11	1,24	1,24	1,26
1,95	1,25	1,24	1,24	1,26	1,24	1,25	1,27	1,36	1,25

Таблиця 22

N варіанта	Кількість груп спостережень	Номери груп	Кількість елементів у групі (поч. З першого)
1	3	1 2 3	4 5 8
2	4	3 4 6 5	11 5 6 7
3	5	4 3 2 1 3	8 7 6 4 5
4	6	1 2 3 4 5 6	5 4 4 3 4 5
5	7	10 1 3 5 7 5 4	5 6 7 8 3 4 5
6	3	5 6 7	7 6 9
7	5	4 8 5	5 6 8
8	4	6 7 4 5	3 4 5 6
9	6	6 4 5 1 2 3	7 5 4 5 6 7
10	5	6 5 4 9 4	5 4 5 6 10

2. Обчислити групові середні з точністю до третього знака після коми за формулою $\overline{Y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ji}$, і загальне групове середнє $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ji}$.

3. Побудувати та заповнити таблиці 23 і 24.

Таблиця 23

	1	2	3	4
N	$y_{j1}-\bar{y}_1$	$(y_{j1}-\bar{y}_1)^2$	$y_{j2}-\bar{y}_2$	$(y_{j2}-\bar{y}_2)^2$
$\sum$				

Таблиця 24

N	*1*	*2*	*3*	*4*
	$y_{j1}-\bar{y}$	$(y_{j1}-\bar{y})^2$	$y_{j2}-\bar{y}$	$(y_{j2}-\bar{y})^2$
$\sum$				

4. Обчислити залишкову варіацію: $S_R^2=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ji}-\bar{y}_i)^2$.

5. Обчислити варіацію зумовлену якісним фактором: $S_A^2=\sum_{i=1}^{l}n_i(y_i-\bar{y})^2$.

6. Обчислити повну варіацію: $S^2=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ji}-\bar{y})^2$.

7. Будуємо розрахункову таблицю дисперсійного аналізу

Таблиця 25

Компонента варіації	Сума квадратів	Число ступенів свободи	Середній квадрат
Між групами спостережень	$S_A^2=$		
В групах	$S_R^2=$		
Повна	$S^2=$		

8. Знаходимо розрахункове F-відношення: $F=\dfrac{S_A^2/(l-1)}{S_R^2(n-l)}$.

Якщо розрахункове значення менше табличного при заданому рівні значимості 5%, то гіпотеза про вплив якісного фактора відкидається.

9. Зробити висновки за одержаними результатами.

Зауваження 1: Бажано рутинні обчислення реалізувати програмно, або використати табличний процесор. Визначити особливості моделювання і машинного експерименту.

Зауваження 2: Для обчислень використати таблицю розподілу Фішера-Снедокора.

<u>Контрольні питання.</u>

1. Сутність дисперсійного аналізу

2. Який фактор називається якісним?
3. Привести приклад задачі, для розв’язку якої необхідне застосування дисперсійного аналізу.
4. Які відмінності між внутрігруповою і міжгруповою дисперсіями?
5. Яким чином використовується в дисперсійному аналізі критерій Фішера?
6. Що називається числом степенів свободи?

Лабораторна робота 3

Тема: Аналіз часових рядів. Трендові моделі. Поліноміальні тренди.
Мета: Навчитись досліджувати та аналізувати динамічні ряди економічних та технічних показників

В загальному випадку часовий ряд містить як детерміновану, так і ви--падкову складову. Математична статистика займається аналізом і прогнозом часових рядів, що містять випадкову складову. Роль детермінованої складової грає, наприклад, результуючий показник, що представляє собою об’єм виробництва, обумовлений загальною тенденцією економічного росту, науково-технічним прогресом і затратами економічних ресурсів. На цей результат, крім економічних факторів, здійснюють довгостроковий вплив, що піддається прогнозуванню і деякі природні фактори. Основна задача аналізу часових рядів полягає у виділенні на основі знання відрізку часового ряду детермінованої і випадкової складової, а також в оцінці їх характеристик. Одержавши оцінки детермінованої і випадкової складових, можна розв’язувати задачі прогнозу майбутніх значень як самого часового ряду, так і його складових.

Постановка задачі

1. За допомогою таблиць 26 і 27 визначити номер свого варіанта і визначити свої дані за цим номером.

Таблиця 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	14	15	18	22	23	25	27	29	35
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
36	38	41	42	43	44	48	49	50	54
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
55	56	57	59	61	68	69	70	71	72

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
75	78	79	81	84	87	89	90	97	99
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
101	105	109	120	124	125	125	147	148	152
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
160	162	163	164	168	169	174	175	176	180

1 - Номер значення показника

46 - Значення показника

Таблиця 27

N варіанта	Номери показників
1	1 12 13 16 34 45 56 57 58 59 60
2	2 4 12 15 17 21 22 29 35 36 45 47
3	4 8 9 16 27 28 29 36 39 47 49 58
4	23 25 28 33 38 41 48 49 51 52 58
5	34 36 38 39 40 42 48 49 54 57 58
6	5 8 9 10 12 15 19 24 28 29 38 39
7	7 8 9 11 12 18 45 47 48 49 58 59
8	14 15 18 19 26 28 29 36 39 45 48
9	6 9 16 18 27 29 30 37 39 45 58 59
10	5 14 18 25 29 35 36 38 39 47 48 54

Приймаємо гіпотезу про лінійність тренду.

2. Обчислити оцінки коефіцієнтів лінійного тренду: $\overline{y} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}$, $\bar{t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T+1}{2}$, де T - довжина числового ряду, y_t - значення показників.

3. Далі обчислимо: $\sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$, $\overline{\alpha}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} t_t y - T\overline{y}\overline{t}}{\sum_{t=1}^{T} t^2 - T\bar{t}^2}$, $\overline{\alpha}_0 = \overline{y} - \overline{\alpha}_1 \bar{t}$.

4. Розраховуємо вирівнені значення за формулою: $\overline{\overline{y_t}} = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 t$.

Заповнюємо таблицю 28.

Таблиця 28

Роки	Фактичне значення параметра	ty_t	Вирівнене значення параметра	Відхилення $y_t - \overline{\overline{y}}_t$	Квадрат відхилення
$\sum$			-	-	

5. За знайденою сумою квадратів відхилень $S_R^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{\overline{y}}_t)^2$ знаходимо оцінку дисперсії випадкової складової $\overline{\sigma}_2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \overline{\overline{y}}_t)^2$.

6. Знаходимо розрахункову значимість коефіцієнта лінійного тренда: $t_{\overline{\alpha}_1} = \frac{\overline{\alpha}_1\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(t-\overline{t})^2}}{\overline{\sigma}}$ і порівнюємо її з табличною (розподіл Ст'юдента), наприклад, при 5% рівні значимості. Якщо розраховане значення перевищує табличне, то коефіцієнт лінійного тренда істотно відрізняється від нуля, тобто тренд дійсно має місце.

7. Знайдемо прогностичні значення тренда на два експерименти (роки, виміри і т.п.)

$$\begin{array}{l} \overline{\overline{y}}_{T+1} = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1(T+1), \\ \overline{\overline{y}}_{T+2} = \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1(T+2) \end{array}.$$

8. Будуємо довірчий інтервал для теоретичного тренду при прогнозі на два роки вперед:

$$\overline{\overline{y}}_{T+2} - t_{0.05}(T-2)\overline{\sigma}_{y_{T+2}} \le \alpha_0 + \alpha_1(T+2) \le \overline{\overline{y}}_{T+2} + t_{0.05}(T-2)\overline{\sigma}_{y_{T+2}},$$

$$\overline{\sigma}_{y_{T+2}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{T} + \frac{(\frac{T-1}{2}+2)^2}{\sum_{t=1}^{T}(t-\overline{t})^2}} .$$

<u>Контрольні запитання</u>.

1. Що називається часовим рядом?
2. Для вирішення яких задач використовують аналіз часових рядів?
3. Які складові, в загальному випадку, має часовий ряд?

4. Як знайти прогнозні значення тренда?
5. Як обчислити довірчі інтервали для теоретичного тренду при прогнозі?

Вимоги до виконання лабораторних робіт (ЛР)

1. ЛР виконується в зошиті, або на аркушах формату А4.
2. Перелік необхідних складових звіту до ЛР:
   - 2.1. Титульна сторінка
   - 2.2. Зміст
   - 2.3. Постановка задачі із своїм варіантом
   - 2.4. Теоретична частина (основні відомості, вирази, використані в роботі)
   - 2.5. Алгоритм роботи
   - 2.6. Текст програми
   - 2.7. Одержані результати
   - 2.7 Аналіз результатів, висновки
   - 2.8 Література

Виконана і оформлена робота представляється до захисту не пізніше початку наступної ЛР.

Рекомендації до виконання лабораторних робіт

Лабораторні роботи рекомендується виконувати шляхом розробки алгоритмів та написання програмних фрагментів, що реалізують статистичні обчислення, або за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Деякі процедури бажано реалізувати як одним так і іншим способом і порівнювати результати.

Розглянемо процес роботи з Microsoft Excel 97. Якщо цей пакет мав стандартну інсталяцію, то методів аналізу статистичних даних в ньому немає. Для того, щоб вони з'явилися, необхідно виконати такі дії. В меню **Сервис** вибрати **Надстройки** і там серед усіх додаткових елементів вказати на **Пакет анализа.** Після цього в меню **Сервис** з'явиться пункт **Анализ данных**. В ньому можна генерувати випадкові числа, що мають задані закони розподілу, будувати гістограми, лінії регресії, проводити кореляційний та однофакторний дисперсійний аналіз і ін..

Для того, щоб виконувати дії над елементами клітин електронної таблиці, необхідно вирази починати із знака "=". Наприклад, =(A2+B2)/C3. Для виконання функцій над елементами вибираємо в меню пункт **Вставка**, далі –

Функция. Найбільш часто використовуються математичні та статистичні функції. Діаграми та графіки малюємо, використовуючи майстер діаграм, який знаходиться на головній панелі.

<u>Література</u>

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1987 г.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975 г.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988 г.
4. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991 г.
5. Розанов Ю.А. Случайные процессы. – М.: Наука, 1971г.
6. Гихман И.И., Скороход А.В.. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977г.
7. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). – М.:Наука, 1969 г.
8. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. - М.:Высшая школа, 1989

Таблиця 29

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
440	607	665	299	341	740	860	103	675	365	360	637	638	661	344	641	448	374	545	395
244	487	460	326	101	882	496	700	157	65	611	625	599	791	300	349	628	676	543	670
549	595	523	169	582	607	435	502	121	448	686	620	301	569	269	562	245	332	499	603
755	439	542	466	641	680	585	304	130	825	304	549	721	362	32	248	604	477	255	378
740	319	490	460	407	333	505	114	531	505	765	74	241	459	260	957	695	454	547	761
847	954	512	510	273	471	617	154	552	446	478	476	633	641	634	666	327	804	530	148
63	610	459	210	483	417	555	376	433	730	640	314	204	130	661	275	574	237	650	610
453	387	484	343	825	706	555	160	537	43	569	219	724	331	741	798	606	313	353	477
719	438	310	682	342	163	479	203	463	499	383	274	796	569	412	446	695	467	623	508
283	115	708	265	332	675	427	382	139	158	324	336	552	424	248	216	455	288	544	369
362	704	763	672	563	440	680	368	483	668	479	381	676	261	125	414	547	213	523	390
162	490	525	624	502	653	852	590	554	487	525	622	561	550	402	555	416	67	674	670
131	578	465	361	120	561	488	442	663	656	437	325	202	651	426	358	602	616	861	661
304	557	301	551	544	435	166	648	331	726	613	472	159	158	694	617	815	432	238	591
345	608	817	40	265	608	552	362	345	113	447	933	686	413	371	453	468	583	253	638
76	689	767	432	544	308	644	727	517	465	406	393	718	348	705	606	295	90	612	826
386	655	702	857	459	333	431	518	591	601	969	521	554	581	560	115	316	734	738	561
419	731	594	460	471	762	251	404	723	606	245	683	412	458	679	278	646	110	324	618
527	491	410	230	587	591	428	850	406	257	518	660	325	398	729	797	819	397	71	871
427	343	321	278	195	423	414	579	642	559	432	481	389	535	624	541	374	305	320	433
435	327	809	692	374	966	337	479	802	393	533	353	269	307	556	679	334	480	540	708
426	615	158	685	316	623	610	566	631	989	579	468	348	313	465	255	705	527	586	529
769	384	215	431	423	172	677	301	406	368	535	260	572	420	581	246	545	847	303	728
769	384	215	431	423	172	677	301	406	368	535	260	572	420	581	246	545	847	303	728
463	371	622	384	622	449	519	604	322	301	498	920	870	133	665	463	102	341	592	344
397	589	343	509	800	491	931	391	407	260	574	542	631	472	480	703	384	351	524	715
894	166	626	307	438	690	721	762	339	540	674	374	456	574	361	703	343	617	392	384
673	623	308	353	9	175	452	447	608	583	354	595	430	554	331	442	742	757	520	607
975	680	550	337	406	807	343	784	256	267	491	674	395	812	855	601	439	213	312	609

369	840	505	579	55	203	143	727	552	618	725	490	588	163	581	690	217	694	321	437
832	481	490	205	717	477	580	421	427	287	585	372	751	557	514	346	724	818	709	412
178	413	171	463	534	142	527	620	705	328	673	337	176	295	708	352	242	367	825	227
608	526	576	461	241	422	281	421	385	581	262	835	157	579	312	440	420	517	366	899
680	773	303	208	727	756	469	337	347	361	513	249	400	640	511	601	212	334	466	387
884	630	495	343	10	393	340	968	374	553	273	519	463	329	463	156	280	639	523	517
483	206	54	102	144	794	722	483	379	520	637	763	823	457	602	740	621	548	869	453
395	470	300	687	614	293	471	388	329	157	415	398	451	394	861	885	524	509	619	106
635	428	527	459	574	727	335	454	35	80	489	543	537	244	417	503	150	294	831	750
424	630	471	276	578	668	573	670	122	777	261	717	323	579	799	242	907	440	535	676
652	108	187	529	611	496	186	391	478	449	406	519	358	585	621	504	548	645	812	766
211	717	426	842	457	366	448	477	567	852	762	783	242	473	821	796	785	498	371	538
331	705	531	258	642	306	674	556	501	267	449	347	760	597	905	533	495	700	307	608
196	362	531	793	510	343	351	246	766	103	279	443	536	570	682	753	452	297	739	450
427	893	493	199	698	218	600	551	511	246	718	818	258	965	898	711	506	652	684	256
494	525	243	218	581	650	540	293	110	601	557	711	894	327	489	574	130	748	154	753
506	457	238	622	602	442	356	987	478	448	728	584	171	575	503	348	362	266	754	442
435	740	271	399	280	408	432	556	765	629	291	383	828	76	805	412	777	579	460	239
939	392	762	610	518	243	117	813	251	304	739	690	211	474	365	768	534	144	273	653
152	210	592	477	517	642	514	127	45	536	382	760	298	697	534	591	412	516	124	657
353	676	428	664	421	192	574	250	749	628	798	366	372	325	278	641	379	701	335	586
13	536	691	372	651	127	627	549	663	408	164	649	360	430	496	311	271	707	595	581
790	383	677	373	523	682	104	366	836	138	355	325	726	382	781	80	750	521	684	370
244	827	421	840	559	785	521	550	617	693	390	485	434	427	565	490	994	348	486	645
369	636	704	529	261	179	566	155	596	279	251	237	758	669	516	700	683	616	489	605
652	707	785	761	437	392	558	495	462	292	573	243	321	475	345	681	480	593	543	715
593	615	672	390	266	368	307	548	509	704	636	299	404	863	116	401	328	646	430	-54
675	219	655	602	454	190	623	187	314	522	664	307	572	412	388	365	483	310	686	593
619	359	553	644	323	751	576	486	361	520	498	725	133	267	170	557	449	619	401	793
226	213	505	392	682	350	623	771	703	452	545	328	609	628	713	286	421	822	969	155
277	840	389	376	703	482	502	631	429	446	288	513	643	480	498	607	674	547	649	509
639	586	240	666	145	418	148	618	296	629	314	410	853	467	735	181	443	423	622	771
565	480	686	790	186	542	560	218	406	200	747	776	987	177	725	791	569	550	304	838
312	702	822	609	476	682	550	487	950	546	269	527	415	336	678	824	659	864	674	548
452	373	808	454	565	942	316	429	559	314	435	654	518	386	622	368	548	20	789	529
526	358	538	102	433	213	417	545	825	474	168	210	289	342	656	756	174	503	354	871
612	396	365	319	702	736	357	464	479	529	495	560	493	237	558	640	505	475	440	491
528	524	608	344	406	325	593	402	475	799	172	327	62	476	485	685	630	698	232	369
318	646	602	517	602	632	572	190	399	640	406	714	229	719	432	281	468	747	771	681
877	892	657	331	311	298	388	378	512	624	419	283	488	368	368	753	170	827	709	498
597	122	486	346	440	569	151	665	270	166	351	573	369	479	476	413	180	136	537	708
514	496	574	121	814	636	415	610	344	258	725	216	373	485	873	750	337	661	62	587
666	635	553	609	695	310	446	282	674	349	172	490	303	678	500	181	552	573	601	791
672	843	346	590	508	670	238	808	385	473	598	98	414	451	803	320	378	648	605	476
373	283	554	416	602	290	628	234	196	306	378	127	679	100	355	110	913	597	743	308
315	481	217	472	253	334	826	632	631	327	474	837	185	23	847	415	457	473	308	192
722	531	357	846	592	697	377	366	340	122	452	383	637	500	250	417	673	832	741	56
260	514	293	126	133	656	701	452	202	674	623	606	476	355	580	634	748	591	388	521
188	777	460	280	659	288	710	632	735	54	585	607	406	475	593	438	408	494	353	560
642	291	519	740	520	645	264	438	400	296	297	899	434	764	284	152	131	496	155	496
628	858	42	705	398	442	473	687	755	56	357	522	280	572	100	510	320	490	775	540
941	446	657	564	354	643	520	129	543	501	528	520	831	438	618	680	520	163	307	552
789	639	454	766	439	428	335	518	454	479	621	443	220	249	293	679	554	589	809	795
761	418	583	713	722	527	424	694	155	823	700	158	632	416	208	449	679	539	267	517
523	310	304	313	860	104	98	484	224	688	200	707	631	345	170	590	85	630	418	277
500	571	481	540	490	806	524	555	746	459	705	510	681	741	411	862	364	466	238	222
591	628	721	358	528	372	368	584	740	566	306	506	642	390	180	589	531	665	818	538
495	400	223	391	666	505	284	639	513	488	556	356	695	415	246	517	528	764	506	690
289	429	598	552	302	438	450	318	563	602	465	423	327	507	142	391	485	880	566	198
145	394	23	127	701	547	517	708	230	616	873	495	881	385	359	557	452	238	695	378
666	512	498	696	722	894	712	410	482	364	486	236	657	721	440	496	794	624	890	605
589	356	647	297	773	649	693	934	445	452	630	384	396	518	713	818	668	457	488	457
624	844	908	484	782	911	387	567	720	516	612	62	342	500	647	108	234	352	294	431
543	586	697	680	461	658	564	602	782	431	551	539	550	484	470	133	405	648	386	467
295	227	532	302	824	769	468	449	230	609	566	296	938	273	469	528	448	966	670	412
748	310	582	607	895	787	350	442	672	337	612	469	884	516	319	836	313	770	674	339
438	467	506	542	500	306	526	390	676	490	618	551	657	465	763	693	460	536	602	629
332	858	310	325	431	632	758	87	437	657	245	447	726	266	703	539	530	405	203	512
336	397	286	697	285	274	286	721	383	608	578	597	170	361	388	731	308	452	221	753
414	421	190	428	289	108	369	569	363	423	594	615	600	624	837	703	668	280	471	552
409	863	390	393	409	595	664	607	450	821	698	567	350	710	307	479	465	515	374	511