МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Затверджено
на засіданні кафедри комп’ютерних технологій
протокол № ______ від “____”______________

Тираж 100 прим.

Вимогам, що ставляться до
навчально-методичних видань,
відповідає

Зав. кафедри __________________А.А.Тимченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи
з курсу

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

для студентів спеціальностей 7.080401, 7.080403, 7.090501
заочної форми навчання

Весь цифровий і фактичний матеріал та бібліографічні
Відомості перевірено. Зауваження рецензента враховано

Зав. кафедри ______________________________
Укладач: _________________________________
Відповідальний редактор____________________
Рецензент ________________________________

Черкаси ЧІТІ 2000 рік

Сучасний стан комп'ютерних наук у значній мірі визначається використанням методів теорії ймовірностей і математичної статистики, що дозволяють оцінювати характеристики складних систем з урахуванням різноманітних випадкових чинників при визначенні точності, швидкодії, надійності та ін. Відповідно до статистичних законів, майбутній стан визначається не однозначно, а лише з деякою ймовірністю, що є об'єктивною мірою можливості реалізації закладених у минулому тенденцій до змін. Математична статистика опирається на теорію ймовірностей і її завдання полягає у відновленні за обмеженими даними із визначеним ступенем достовірності характеристик, властивих всьому мислимому наборові даних, що описують досліджувані явища. В останні десятиліття від теорії ймовірностей ‘відбрунькувались' такі галузі науки, як теорія інформації, теорія надійності й ін. Всі вони застосовуються при проектуванні обчислювальної техніки, обробці інформації і водночас допускають активне її використання для вирішення своїх задач, що визначає необхідність оволодіння методами теорії ймовірностей і математичної статистики як інструментом системного аналізу та математичним апаратом для прогнозування явищ і процесів.

Контрольна робота складається з десяти тем. Студент виконує одне завдання з кожної теми. Номер варіанта студента є сумою двох останніх цифр залікової книжки. Якщо номер варіанта 4, то необхідно виконати завдання, що мають четвертий номер з кожної теми. Контрольна робота виконується у звичайному зошиті. Задачі з математичної статистики бажано виконувати за допомогою електронних таблиць, наприклад, Microsoft Excel.

1. Класичне та аксіоматичне означення ймовірностей. Геометричні ймовірності.

Класичне означення ймовірності. Ймовірність події А обчислюють як відношення кількості результатів дослідів, що сприяють події А до загальної їх кількості: $P(A)=\dfrac{m_A}{n}$, де m_A - кількість результатів, що сприяють події А, n - загальна кількість результатів дослідів.

Достовірною називається подія, яка в результаті досліду неодмінно відбувається. Протилежною до достовірної події є *неможлива* подія, тобто така подія, яка в даному досліді взагалі не може відбутися. *Практично неможливою* є подія, ймовірність якої не в точності дорівнює нулю, але дуже близька до нуля. *Практично достовірною* є подія, ймовірність якої в точності не дорівнює одиниці, але дуже близька до одиниці. Кажуть, що декілька подій в даному досліді утворюють *повну групу*, якщо в результаті досліду неодмінно повинна з'явитись одна з них. Декілька подій в даному досліді називаються *несумісними*, якщо ніякі дві з них не можуть з'явитися разом.

Урнова схема. Нехай в урні знаходиться n чорних та m білих кульок. З урни навмання дістають k кульок, $0 < k < n+m$. Ймовірність того, що серед них l білих кульок ($l \le k$) дорівнює $P(A) = \dfrac{C_m^l C_n^{k-l}}{C_{n+m}^k}$, де $C_a^b = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$ - кількість сполучень із a по b.

Аксіоматичне означення ймовірності (за О.М. Колмогоровим). Нехай проводиться дослід із випадковим результатом. Множину всіх можливих результатів досліду позначимо Ω. Кожен її елемент $\omega \in \Omega$ називають *елементарною подією*, а всю множину Ω - *простором елементарних по-дій*. Будь-яка подія А є деякою підмножиною множини Ω: $A \subseteq \Omega$.

1. Кожній випадковій події $A \subseteq \Omega$ ставиться у відповідність невід'ємне число $P(A)$, яке називають ймовірністю.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Для попарно несумісних подій A_i, $i = \overline{1,n}$ $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Наслідки. 1) Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.
2) Для будь-якої події А $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, де $\overline{A}$ - протилежна подія.
3) Для будь-якої події А $0 \le P(A) \le 1$.

Геометричні ймовірності. Нехай на площині є деяка область Ω і в ній міститься інша область А. Необхідно знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання в Ω попаде в А. Ймовірність попадання точки в будь-яку частину області Ω пропорційна мірі (mes) цієї частини (довжині, площі, об'єму і т.д.) і не залежить від її розміщення та форми: $P = \dfrac{mes(A)}{mes(\Omega)}$.

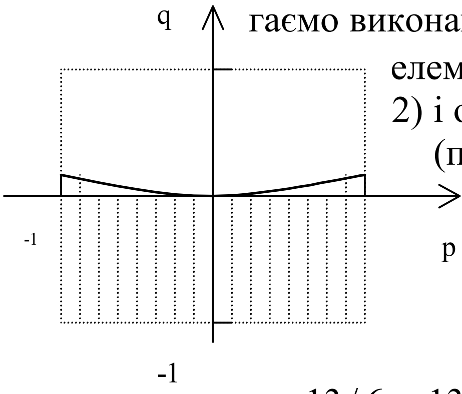
<u>Приклад 1. 1.</u> Нехай в урні знаходиться 10 кульок білого кольору, 20 – чорного і 30 синього. Навмання витягують без повернення 15 кульок. Яка ймовірність події А = {кульок різного кольору витягнуто порівну}?

<u>Розв'язок</u>. Згідно формули класичної ймовірності $P(A) = \dfrac{m_A}{n}$. Кількість способів витягнути 15 кульок із 60 (кількість усіх кульок в урні) - $n = C_{60}^{15}$. Кількість способів витягнути по 5 кульок різного кольору $m_A = C_{10}^5 \cdot C_{20}^5 \cdot C_{30}^5$.

Таким чином, $P(A) = \dfrac{C_{10}^5 \cdot C_{20}^5 \cdot C_{30}^5}{C_{60}^{15}} = 0{,}010467$.

Приклад 1.2. Дві точки вибираються навмання із відрізка [-1;1]. Нехай p і q - координати цих точок. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ буде мати дійсні корені.

Розв'язок. Для того, щоб рівняння мало дійсні корені, вимагаємо виконання нерівності $p^2 - 4q \geq 0$. Зобразимо простір елементарних подій Ω (прямокутник із стороною 2) і область, що визначається вказаною нерівністю (під параболою). Оскільки площа прямокутника дорівнює $mes(\Omega) = 4$, а площа криволінійної трапеції $mes(A) =$



$$= 2 + \int_{-1}^{1} \frac{p^2}{4} dp = 2 + \frac{p^3}{12}\Bigg|_{-1}^{1} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6},$$ то

має мо $P(A) = \dfrac{13/6}{4} = \dfrac{13}{24}$.

Задачі

1.1. Гральний кубик кидають 6 раз. Знайти ймовірність того, що кожен раз випадатиме різна кількість очків.

1.2. В умовах задачі 1.1 знайти ймовірність того, що кожен раз випадатиме шістка.

1.3. В умовах задачі 1.1. знайти ймовірність того, що кожен раз випадатиме непарна кількість очків.

1.4. В умовах задачі 1.1. знайти ймовірність того, що перші три рази випадатиме парна кількість очків, а інші три – непарна.

1.5. В урні 10 білих і 20 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що серед 7 витягнутих кульок буде 3 білих.

1.6. В урні 10 білих, 20 чорних та 30 синіх кульок. Знайти ймовірність того, що серед 15 витягнутих кульок по 5 різного кольору.

1.7. Є колода з 36 карт. Знайти ймовірність того, що верхня і нижня карта тузи.

1.8. В умовах задачі 1.7 знайти ймовірність того, що перші 9 карт однієї масті.

1.9. В умовах задачі 1.7 знайти ймовірність того, що зверху колоди лежать туз, король і дама у вказаному порядку.

1.10. Яка ймовірність вгадати 5 номерів у спортлото 6 із 40?

1.11. Двоє студентів домовились зустрітися між 15 та 16 годинами дня, причому домовились чекати один іншого не більше 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч не відбудеться.

1.12. В коло вписаний трикутник. Знайти ймовірність того, що кинута навмання в коло точка попаде в трикутник.
1.13. В квадрат із стороною 3 см. кинута навмання точка. Яка ймовірність того, що точка впаде на відстані від центра квадрата не більшій 1 см?
1.14. На відрізок числової осі довжиною 5 см. поставили навмання дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними менша за 2 см?
1.15. В середині квадрата із стороною 5 см. знаходиться рівносторонній трикутник, площа якого втричі менша площі квадрата. Знайти ймовірність того, що кинута навмання в квадрат точка попаде в трикутник.
1.16. Коло вписане в рівносторонній трикутник із стороною 5 см. Яка ймовірність того, що кинута навмання в трикутник точка попаде в коло?
1.17. Квадрат вписаний в рівносторонній трикутник із стороною 10 см. Яка ймовірність того, що кинута навмання в трикутник точка попаде в квадрат?
1.18. Яка ймовірність того, що із трьох відрізків довжиною x, y, z можна побудувати трикутник?
1.19. Всередині еліпса з півосями 10 і 8 см розміщене коло радіусом 3 см. Яка ймовірність того, що кинута навмання в еліпс точка попаде в коло?
1.20. Площина розграфлена квадратною сіткою. Довжина сторони квадрата 10 см. На площину кидають навмання коло радіусом 3 см. Яка ймовірність того, що коло не перетне ні однієї із сторін квадратів?

2. Теореми додавання та множення ймовірностей.

Умовною ймовірністю події A при умові, що відбулася подія B, називається величина P(A/B)=P(AB)/P(B) (P(B)≠0). Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої події.
Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженій на умовну ймовірність другої при наявності першої: P(AB)=P(A)P(B/A).
Для *незалежних* подій P(AB)=P(A)P(B).
Теорема додавання ймовірностей. Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей подій мінус ймовірність їх добутку: P(A+B)=P(A)+ +P(B)-P(AB).
Для *несумісних* подій P(A+B)=P(A)+P(B).
Приклад 2.1. Кидають гральний кубик. Яка ймовірність події A={випаде парна кількість очок}?
Розв'язок. Подія A дорівнює сумі несумісних подій A_i={випаде i очок, $i \in \{2,4,6\}$ }. Відомо, що $P(A_i) = 1/6$. Тоді за теоремою додавання ймовірностей $P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \; = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

Приклад 2.2. Є два технічні пристрої, які працюють незалежно. Ймовірність виходу першого пристрою з ладу протягом доби дорівнює 0,2, другого – 0,3. Знайти ймовірнсть події A={протягом доби з ладу вийде хоча б один пристрій}.

Розв'язок. Розглянемо протилежну до події A подію $\overline{A}$={протягом доби з ладу не вийде ні один пристрій} і події B_i={проягом доби з ладу не вийде і-й пристрій, $i = \overline{1,2}$ }. Тоді за формулою ймовірності протилежної подій та теоремою множення ймовірностей одержимо $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B_1) \times \times P(B_2) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}44$.

Задачі

2.1. В урні 10 білих, 20 чорних і 30 синіх кульок. Дістають навмання три кульки. Знайти ймовірність того, що кульки всі синього кольору.
2.2. В умовах задачі 2.1 знайти ймовірність того, що всі кульки різного кольору.
2.3. В умовах задачі 2.1. знайти ймовірність того, що дві кульки одного кольору.
2.4. В умовах задачі 2.1. знайти ймовірність того, що дві кульки білого кольору і одна чорного.
2.5. В першій урні 5 білих та 10 чорних кульок. В другій урні 12 білих та 10 чорних кульок. З урн дістають по три кульки. Знайти ймовірність того, що серед 6 витягнутих кульок 3 білих.
2.6. В умовах задачі 2.5 знайти ймовірність того, що всі кульки одного кольору.
2.7. Ймовірність виходу з ладу на протязі доби технічного пристрою (ТП) 0,1. Знайти ймовірність того, що ТП не вийде з ладу протягом трьох діб.
2.8. В умовах задачі 2.7 знайти ймовірність того, що ТП вийде з ладу на третю добу.
2.9. Три ТП незалежно один від іншого за добу виходять з ладу з ймовірностями, відповідно, 0,1, 0,2, 0,3. Знайти ймовірність того, що за добу вийдуть з ладу три ТП.
2.10. В умовах задачі 2.9 знайти ймовірність того, що з ладу вийдуть 2 ТП.
2.11. В умовах задачі 2.9 знайти ймовірність того, що з ладу вийде один ТП.
2.12. В умовах задачі 2.9 знайти ймовірність того, що з ладу вийдуть перший і другий, або другий і третій ТП.
2.13. Ймовірність вибити 10 очок стрільцем дорівнює 0,5, 9 очок – 0,7, 8, або менше очок – 0,9. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець виб'є не менше 9 очок.

2.14. В партії з 20 пристроїв 15 є сертифікованими. Знайти ймовірність того, що серед двох, вибраних навмання, пристроїв хоча б один сертифікований.
2.15. В умовах задачі 2.14 знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання 5 пристроїв 3 сертифікованих.
2.16. В умовах задачі 2.14 знайти ймовірність того, що серед 3 вибраних пристроїв всі сертифіковані.
2.17. На автоматичній лінії працює три датчики. Для кожного датчика ймовірність того, що він в даний момент часу включений дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що в даний момент включено хоча б два датчики.
2.18. На підприємстві виготовляють 98% стандартних мікросхем, з яких 90% потім сертифікуються. Знайти ймовірність того, що взята навмання мікросхема сертифікована.
2.19. Знайти ймовірність того, що серед трьох кинутих гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на двох.
2.20. Знайти ймовірність того, що серед трьох кинутих гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на одній.

3. Формула повної ймовірності та формула Байєса

Формула повної ймовірності. Нехай необхідно провести дослід, про умови якого можна зробити n гіпотез, що виключають одна іншу, $H_1, H_{2,...,}H_n$ $(H_iH_j = \varnothing \text{ при } i \neq j)$. Ймовірності гіпотез відомі і рівні $P(H_1), P(H_2),..$ $...,P(H_n)$. Подія А може з'явитися тільки з однією з гіпотез. Задані умовні ймовірності події А при кожній із гіпотез $P(A/H_1), P(A/H_2),...,P(A/H_n)$. Тоді $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$.

Формула Байєса. До досліду про його умови можна було зробити ряд гіпотез $H_1, H_{2,...,}H_n$, несумісних, які утворюють повну групу: $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $H_iH_j = \varnothing \text{ при } i \neq j$. Ймовірності гіпотез (апріорні) до досліду задані і рівні $P(H_1), P(H_2),...,P(H_n)$; $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$. Дослід проведений і в його результаті з'явилась подія А. З врахуванням цього факту необхідно знайти післядослідні (апостеріорні) ймовірності гіпотез при умові, що дослід дав результат А: $P(H_1/A), P(H_2/A),...,P(H_n/A)$. Маємо $P(H_i/A) =$

$$= \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, i = \overline{1,n} .$$

Приклад 3.1. Два підприємства виробляють однотипні деталі. Перше підприємство дає 10% браку, друге - 15% . Для контролю відібрано 20 деталей з першого підприємства і 30 – з другого. Деталі змішані в одну партію і з неї навмання вибирають одну деталь. Яка ймовірність того, що вона бракована?

Розв'язок. Подія A={відібрана деталь бракована}. Гіпотези H_i ={деталь вироблена на і-му підприємстві}, $i=\overline{1,2}$. Ймовірності гіпотез: $P(H_1)=$ $=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}=\dfrac{2}{5}$, $P(H_2)=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}=\dfrac{3}{5}$. Умовні ймовірності визначені умовою задачі: $P(A/H_1)=0{,}1$, $P(A/H_2)=0{,}15$. Тоді за формулою повної ймовірності $P(A)=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}\cdot 0{,}1+\dfrac{n_2}{n_1+n_2}\cdot 0{,}15=0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}15=0{,}13$.

Приклад 3.2. По каналу зв'язку передають три повідомлення. Ймовірності одержання повідомлень адресатами рівні, відповідно, 0,8, 0,9, 0,6. Яка ймовірність того, що друге повідомлення адресатом не отримано, якщо отримані два повідомлення?

Розв'язок. Нехай подія A={отримано два повідомлення з троьох}. Гіпотези H_i ={і-повідомлення не отримано, $i=\overline{1,3}$}. Ймовірності гіпотез рівні: $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}1$, $P(H_3)=0{,}4$. Події A/H_i ={отримані два повідомлення при умові, що і-повідомлення не отримане },$i=\overline{1,3}$. Ймовірності цих подій рівні: $P(A/H_1)=0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6=0{,}108$, $P(A/H_2)=0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6=$ $=0{,}048$, $P(A/H_3)=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4=0{,}288$. За формулою Байєса апостеріорна ймовірність $P(H_2/A)=\dfrac{0{,}1\cdot 0{,}048}{0{,}2\cdot 0{,}108+0{,}1\cdot 0{,}048+0{,}4\cdot 0{,}288}=0{,}034$.

Задачі

3.1. Є три однакові ящики. В першому ящикові 3 білих і 5 чорних кульок, в другому – 5 білих і 8 чорних, в третьому – 8 білих і 4 чорних. Навмання вибирають ящик і дістають дві кульки. Знайти ймовірність того, що ці кульки білі.

3.2. В умовах задачі 3.1 знайти ймовірність того, що кульки білі.

3.3. В умовах задачі 3.1 знайти ймовірність того, що кульки різного кольору.

3.4. Технічний пристрій на протязі доби працює 50% часу у першому режимі, 20% у другому, 30% у третьому. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) пристрою при роботі у першому режимі 0,8, у другому – 0,9, у третьому – 0,7. Знайти повну надійність приладу.

3.5. Є дві партії однорідних виробів: перша складається з 20 виробів, серед яких 20% з дефектами, в другій – 30 виробів, з яких 5 з дефектами. Навмання беруть з першої партії 3 вироби, з другої – 4 і змішують. Із одержаних семи виробів випадковим чином беруть два. Знайти ймовірність того, що вони без дефектів.
3.6. В умовах задачі 3.5 знайти ймовірність того, що обидва вироби з дефектами.
3.7. В умовах задачі 3.5 знайти ймовірність того, що один з виробів з дефектами.
3.8. Повідомлення може передаватися по одному з каналів зв'язку, що знаходяться в різних станах; з них 10 каналів у відмінному, 8 - в доброму, 6 – в посередньому. Ймовірність правильної передачі повідомлення для різного виду каналів, відповідно, дорівнює 0,9, 0,8, 0,7. Для підвищення достовірності повідомлення передається по одному і тому ж каналу зв'яз-ку, який вибирається навмання, два рази. Знайти ймовірність того, що два рази повідомлення буде передано правильно.
3.9. В умовах задачі 3.8 знайти ймовірність того, що обидва рази повідомлення буде передано неправильно.
3.10. В умовах задачі 3.8 знайти ймовірність того, що один раз повідомлення буде передано правильно.
3.11. В умовах задачі 3.8 знайти ймовірність того, що хоча б один раз повідомлення буде передано правильно.
3.12. Є три ящики; в першому 5 білих кульок і 2 чорних, в другому – 7 білих і 4 чорних, в третьому – 8 білих і 4 чорних. Навмання вибирають урну і дістають з неї кульку. Вона чорна. Знайти післядослідні (апосте-ріорні) ймовірності того, що кулька з 1-го, 2-го, 3-го ящика.
3.13. В партії технічних пристроїв є 10 виробів першого підприємства, 20 – другого, 30 – третього. Відомо, що ймовірність дефекту для пристроїв першого підприємства 0,15, другого – 0,1, третього – 0,2. Якщо пристрій з дефектом, то він не проходить випробовування. Взятий навмання з партії пристрій випробовування не пройшов. Знайти ймовірність того, що він виготовлений на 1-му, 2-му, 3-му підприємстві.
3.14. До досліду про його умови можна було зробити три гіпотези з ймовірностями, відповідно, 0,4, 0,25, 0,35. В результаті досліду з'явилась подія А, яка неможлива при першій гіпотезі і достовірна при другій та третій гіпотезі. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.
3.15. Розслідуються причини поломки пристрою, про які зроблені три гіпотези. Згідно статистики, ймовірності гіпотез 0,3, 0,5, 0,2. Огляд пристрою показав, що в результаті поломки відбулася подія A={відмова автоматизованої системи контролю}. Умовні ймовірності події А при тих же

гіпотезах рівні, відповідно, 0,1, 0,5, 0,4. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

3.16. За об'єктом ведеться спостереження. Є гіпотези, що він може з ймовірністю 0,8 функціонувати і з ймовірністю 0,2 не функціонувати. Існує два джерела інформації; перше повідомляє, що об'єкт не функціонує, друге, що функціонує. Перше джерело дає правильну інформацію з ймовірністю 0,7, другий – з ймовірністю 0,6. На основі аналізу даних знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

3.17. Технічний пристрій складається з трьох вузлів. Пристрій працює, коли працюють всі вузли. Надійності вузлів відомі і рівні, відповідно, 0,9, 0,8, 0,7. Вузли відмовляють незалежно один від іншого. Через деякий час встановили, що пристрій несправний. Знайти з врахуванням цього ймовірності гіпотез: H_1={не працює перший вузол}, H_2={не працює другий вузол}.

3.18. В умовах задачі 3.17 знайти ймовірності гіпотез: H_3={не працюють два вузли}, H_4={не працюють три вузли}.

3.19. В умовах задачі 3.17 знайти ймовірності гіпотез: H_5={всі вузли працюють}, H_6={не працюють перший і третій вузли}.

3.20. По мішені незалежно стріляють два стрільці, роблячи кожен по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця 0,8, для другого – 0,6. В мішень влучила одна куля. Яка ймовірність того, що влучний постріл зробив перший стрілець.

4. Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин.

Законом розподілу випадкової величини називається правило (таблиця, функція), яке дозволяє знаходити ймовірності подій, пов'язаних із випадковою величиною. *Рядом розподілу* випадкової величини X називається таблиця, в верхньому рядку якої перераховані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини, а в нижньому – ймовірності цих значень.

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що вона прийме значення менше, ніж задане x: F(x)=P{X<x}. Властивості функції розподілу: 1. F(x) – неспадна функція свого аргу-менту. 2. $F(-\infty)=0$. 3. $F(+\infty)=1$.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих її значень на ймовірності цих значень: $MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. *Дисперсією* дискретної випадкової величини X є математичне сподівання квадрата відповідної центрованої випадкової ве-личини: $DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 p_i$.

Випадкова величина X має *біноміальний розподіл*, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…,n, а відповідні ймовірності: $P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, де 0<p<1; q=1-p; m=0,1,2,…,n.

Випадкова величина X має *розподіл Пуассона*, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…, а відповідні ймовірності: $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0,1,2,...)$.

Випадкова величина X має *геометричний розподіл*, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…, а ймовірності цих значень: $P_m = q^m p$, де 0<p<1; q=1-p; m=0,1,2,…

Випадкова величина X має *гіпергеометричний розподіл* з парметрами a, b, n, якщо її можливі значення: 0, 1, 2,…,m,…,a мають ймовірності: $P_m = P\{X = m\} = (C_a^m C_b^{n-m}) / C_{a+b}^n \quad (m = 0,1,2,..., a)$.

Твірною функцією для випадкової величини X називається функція вигляду: $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, де z - довільний параметр $(0 < z \le 1)$. Для твірної функції справедливі наступні *співвідношення*: 1. $\varphi(1) = 1$. 2. $MX = \varphi'(1)$. 3. $DX = \varphi'(1) + \varphi''(1) - (\varphi'(1))^2$.

Приклад 4.1. По каналу зв'язку передається два повідомлення. Кожне з них незалежно від іншого спотворюється з ймовірністю 0,2. Випадкова величина X – число спотворених повідомлень. Побудувати ряд розподілу X, знайти математичне сподівання, дисперсію.

Розв'язок. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом і може приймати значення 0,1,2. $P\{X = 0\} = C_2^0 p^0 q^2 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$. $P\{X = 1\} = C_2^1 p^1 q^1 = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$. $P\{X = 2\} = C_2^2 p^2 q^0 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.

Маємо ряд розподілу

X	0	1	2
p	0,64	0,32	0,08

Математичне сподівання $MX = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}64 + 1 \cdot 0{,}32 + 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}48$.

Дисперсія $DX = \sum_{i=1}^{3} (x_i - MX)^2 p_i = (0 - 0{,}48)^2 \cdot 0{,}64 + (1 - 0{,}48)^2 \cdot 0{,}32 +$
$+ (2 - 0{,}48)^2 \cdot 0{,}08 = 0{,}419$.

Приклад 4.2. На автоматичну телефонну станцію надходить потік викликів з інтенсивністю $\lambda = 0{,}5$ (викл./хв.). Знайти ймовірність події А={за три хвилини прийде хоча б один виклик.}
Розв'язок. Випадкова величина X – кількість викликів за три хвилини має розподіл Пуассона з параметром $a = \lambda \cdot \tau = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$. Розглянемо протилежну до події А подію $\overline{A}$={за три хвилини не надійде жодного виклику}.
Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{a^0}{0!} e^{-1{,}5} = 1 - 0{,}223 = 0{,}777.$

Задачі

В задачах 4.1-4.4 знайти математичне сподівання, дисперсію і побудувати графік функції розподілу випадкової величини X

4.1.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/5	1/5	1/25	4/25	2/5

4.2.

x_i	3	4	5	6	8
p_i	1/2	1/8	1/8	1/8	1/8

4.3.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	1/9	1/9	1/9	1/3	1/3

4.4.

x_i	-2	0	3	4	5
p_i	1/4	1/4	1/4	1/8	1/8

4.5. Середнє число викликів на АТС в хвилину дорівнює 200. Знайти ймовірності наступних подій: А={за три секунди на АТС не надійде жодного виклику}, В={за три секунди на АТС надійде менше трьох викликів}.
4.6. В умовах задачі 4.5 знайти ймовірності подій: С={за одну секунду на АТС надійде рівно три виклики}, Д={за дві секунди на АТС надійде не менше двох викликів}.
4.7. Технічний пристрій складається із 100 елементів, кожен з яких незалежно від інших виходить з ладу за час T з ймовірністю $p=5\cdot 10^{-3}$. Знайти ймовірності наступних подій: А={за час T відмовить рівно три елементи}, В={за час T відмовить хоча б один елемент}, С={за час T відмовить не більше 3 елементів}.

4.8. В умовах задачі 4.7 знайти ймовірності наступних подій: Д={за час Т не відмовить ні один елемент}, Е={за час Т відмовлять рівно два елементи}, К={за час Т відмовлять не більше двох елементів}.
4.9. Технічний пристрій складається із 6 незалежно працюючих елементів. Ймовірності відмови кожного з елементів за час Т однакові і рівні р=0,2. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовили хоча б 3 елементи.
4.10. Для контролю надійшла партія деталей. Відомо, що 5% всіх деталей не задовільняють стандарту. Скільки потрібно випробувати деталей, щоб з ймовірністю не менше 0,95 виявити хоча б одну нестандартну деталь.
4.11. Серед деталей 0,5% бракованих. Яка ймовірність того, що серед 4000 взятих навмання деталей 40 бракованих?
4.12. Автоматична станція одержує за добу в середньому 5000 викликів. Яка ймовірність того, що за дану хвилину вона отримає точно 5 викликів?
4.13. Ймовірність вибрати бракований пристрій дорівнює 1/10. Вибрано 40 пристроїв. Випадкова величина Х – число бракованих пристроїв. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Х.
4.14. По каналу зв’язку передається 6 повідомлень, кожне з яких незалежно від інших спотворюється з ймовірністю 0,2. Випадкова величина Х – число спотворених повідомлень. Побудувати її ряд розподілу, знайти математичне сподівання та дисперсію.
4.15. По каналу зв’язку передаються 3 повідомлення, кожне з яких незалежно від інших спотворюється: перше з ймовірністю 0,2, друге – з ймовірністю 0,3, третє – з ймовірністю 0,4. Побудувати ряд розподілу випадкової величини Х – кількість спотворених повідомлень.
4.16. В умовах задачі 4.15 знайти: а) ймовірність того, що буде спотворено одне повідомлення; б) ймовірність того, що буде спотворено два повідомлення.
4.17. На автоматичну телефонну станцію поступають виклики з інтенсивністю $\lambda = 2$ (викл./хв.). Знайти ймовірність того, що за три хвилини:
а) не надійде ні одного виклику; б) надійде рівно один виклик.
4.18. В умовах задачі 4.17 знайти ймовірності того, що: а) надійде два виклики; б) надійде три виклики; с) надійде не менше двох викликів.
4.19. При кожному повороті радіолокатора об’єкт виявляють з ймовірністю $p = 0{,}3$. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості поворотів радіолокатора, які буде виконано без виявлення об’єкта.
4.20.В умовах задачі 4.20 знайти математичне сподівання та дисперсію числа поворотів радіолокатора, які необхідно виконати до виявлення об’єкта (враховуючи і той, при якому об’єкт буде виявлено).

5. Закони розподілу та числові характеристики неперервних випадкових величин.

Щільністю розподілу неперервної випадкової величини X в точці x називається похідна її функції розподілу: $f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$. *Властивості* функції розподілу: 1. $f(x) \geq 0$. 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. *Математичне сподівання* величини X: $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, *дисперсія* - $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx$.

Випадкова величина X має *рівномірний розподіл*, якщо її щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$ *при* $x \in (a,b)$.

Випадкова величина X має *показниковий розподіл*, якщо її щільність розподілу $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ *при* $x > 0$.

Приклад 5.1. Дана функція розподілу $F(x) = \{0,\ при\, x < 0,\ (a+1)x^2,$ $при\ 0 \leq x \leq 2,\ 1,\ при\ \ x > 2\}$ випадкової величини X. Знайти: 1) значення параметра с; 2) функцію щільності розподілу; 3) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X; 4) ймовірність того, що X прийматиме значення з інтервалу (1;3);.

Розв'язок. Щільність розподілу випадкової величини X $f(x) = 2(a+1)x,$ $при\ x \in [0;2]$. Значення параметра с визначаємо, використовуючи властивість щільності розподілу: $\int_0^2 2(a+1)xdx = (a+1)x^2\Big|_0^2 = 4(a+1) = 1$. Звідси $a = -\frac{3}{4}$. Тоді характеристики $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$,

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx = \int_0^2 (x - \frac{4}{3})^2 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{9}x)dx =$$

$= \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^2)\Big|_0^2 = \frac{2}{9}$. Ймовірність $P\{X \in (1;3)\} = \int_1^3 \frac{x}{2}dx = \int_1^2 \frac{x}{2}dx =$ $= \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}$.

Приклад 5.2. Ймовірність безвідмовної роботи технічного пристрою розподілена за показниковим законом $f(t) = 0{,}005e^{-0{,}005t}$ (t>0). Знайти ймовірність того, що пристрій пропрацює 500 годин.

Розв'язок. Оскільки функція показникового розподілу має вигляд $F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{-0,005t}$, то $P\{t \ge 500\} = e^{-0,005 \cdot 500} = 0,0821$.

Задачі

У задачах 5.1-5.10 дана функція розподілу F(x) випадкової величини X. Знайти:
1) значення параметра c; 2) функцію щільності розподілу; 3) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X; 4) ймовірність того, що X прийматиме значення з інтервалу (2;4); 5) побудувати графіки функції щільності розподілу та функції розподілу.

5.1. $F(x) = \{0,\ \text{\textit{при}}\ x < 0;\ a\,x^2,\ \ \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le 2;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 2\}$.

5.2. $F(x) = \{0, \text{\textit{при}}\ x < -2;\ (a + x)^2,\ \text{\textit{при}} -2 \le x \le 2;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 2\}$.

5.3. $F(x) = \{0,\ \text{\textit{при}}\ x < -1;\ a(1 + x)^2,\ \ \text{\textit{при}}\ -1 \le x \le 1;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 1\}$.

5.4. $F(x) = \{0, \text{\textit{при}}\ x < 0;\ a(1 - x^3),\ \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le 3;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 3\}$.

5.5. $F(x) = \{0, \text{\textit{при}}\ x < 0;\ a(1 - \cos x),\ \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le \pi;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > \pi\}$.

5.6. $F(x) = \{0, \text{\textit{при}}\ x < -2;\ ax^2 + 1,\ \text{\textit{при}} -2 \le x \le 1;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 1\}$.

5.7. $F(x) = \{0,\ \text{\textit{при}}\ x < 1;\ a - x^2,\ \ \text{\textit{при}}\ 1 \le x \le 2;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 2\}$.

5.8. $F(x) = \{0,\ \text{\textit{при}}\ x < -2;\ a + x^4,\ \ \text{\textit{при}}\ -2 \le x \le 3;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 3\}$.

5.9. $F(x) = \{0, \text{\textit{при}}\ x < -\pi;\ (\sin x)^2,\ \text{\textit{при}}\ -\pi \le x \le \pi;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > \pi\}$.

5.10. $F(x) = \{0,\ \text{\textit{при}}\ x < 0;\ \ x^2 - 2a,\ \ \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le 2;\ 1,\ \text{\textit{при}}\ \ x > 2\}$.

5.11. Випадкова величина X розподілена по закону, що визначається щільністю розподілу ймовірностей виду

$$f(x) = \begin{cases} c\cos x, & \text{\textit{якщо}}\ -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \text{\textit{если}}\ \ |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти константу c, обчислити $P\{|X| < \pi/4\}$, MX , DX .

5.12. Функція розподілу випадкової величини неперервного типу задана у вигляді

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{якщо}}\ x \le 0, \\ x^2/6, & \text{\textit{якщо}}\ 0 < x \le 3, \\ 1, & \text{\textit{якщо}}\ x > 3. \end{cases}$$

Обчислити $P\{X \ge 2\}$, MX, DX .

5.13. Сигнали йдуть з інтервалом 10 хв. Вважаючи, що випадкова величина X – час очікування сигналу розподілена рівномірно на вказаному інтервалі, знайти середній час очікування і дисперсію часу очікування.

5.14. В умовах задачі 5.12 знайти функцію розподілу випадкової величини X і обчислити ймовірність того, що час очікування перевищить три хвилини.
5.15. Випадкова величина має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $MX = 10$, $DX = 5$. Знайти симетричний відносно MX інтервал, в який з ймовірністю 0,9955 попадає виміряне значення.
5.16. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ. Вивести рекурентну формулу, що виражає центральний момент (к+1)-го порядку через центральний момент к-го порядку і математичне сподівання.
5.17. Використовуючи результат задачі 5.15. обчислити коефіцієнт асиметрії і коефіцієнт ексцесу показникового розподілу
5.18. Тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0,02t}$, $(t > 0)$. Знайти ймовірність того, що за t=12 год. елемент: 1) відмовить; 2) не відмовить.
5.19. Ймовірність безвідмовної роботи телевізора розподілена за показниковим законом $f(t) = 0,005e^{-0,005t}$, $(t > 0)$. Знайти ймовірність того, що телевізор пропрацює 500 годин.
5.20. Неперервна випадкова величина має показниковий розподіл з функцією щільності $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0, \\ 5e^{-5x}, & при \quad x \geq 0 \end{cases}$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань випадкова величина X попаде в інтервал (2;3).
5.21. В умовах задачі 5.20 знайти ймовірність того, що в результаті випробувань випадкова величина X попаде в інтервал (-1;4).

6. Нормальний розподіл. Функція Лапласа. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.

Випадкова величина X розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Функцією Лапласа, або інтегралом ймовірностей називається функція: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
Ймовірність попадання нормально розподіленої величини X на відрізок від α до β виражається формулою: $P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi(\frac{\beta - m}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - m}{\sigma})$.
Ймовірність попадання нормально розподіленої величини X на відрізок довжиною $2l$, симетричний відносно центра розсіювання $P\{|X - MX| < l\} = 2\Phi(l/\sigma)$.

Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p появи події А в кожному досліді дорівнює p, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія А з'явиться в n дослідах k раз, приближно дорівнює: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}$, де $x_k = (k - np)/\sqrt{npq}$.

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p пояаи події А в кожному досліді постійна і відмінні від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія А з'явиться в n дослідах від k_1 до k_2 раз, приблизно дорівнює інтегралу: $P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x')$, де $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ і $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Приклад 6.1. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу із математичним сподіванням $MX = 10$, середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти симетричний відносно MX інтервал, в який з ймовірністю $p = 0{,}9544$ попадає X.

Розв'язок. Використаємо відому формулу $P\{|X - MX| < l\} = 2\Phi(l/\sigma)$. Враховуючи, що $2\Phi(l/\sigma) = p$ і підставивши значення, одержимо $\Phi(l/5) = = p/2 = 0{,}9544/2 = 0{,}4772$. З таблиці функції Лапласа знаходимо, що $l/5 = 2{,}0$, $l = 10$. Тоді інтервалом симетричним відносно MX є (0; 20).

Приклад 6.2. Проводяться послідовні досліди за схемою Бернуллі. Ймовірність здійснення події А в одному досліді 0,6. Знайти ймовірність того, що в 60 дослідах подія А з'явиться від 30 до 40 раз.

Розв'язок. Використаємо інтегральну теорему Лапласа. Знайдемо $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq} = (30 - 60 \cdot 0{,}6)/\sqrt{60 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = -1{,}58$ і $x'' = (k_2 - np)/ /\sqrt{npq} = (40 - 60 \cdot 0{,}6)/\sqrt{60 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 1{,}06$. Тоді $P_{60}(30,40) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') = = \Phi(1{,}06) - \Phi(-1{,}58) = \Phi(1{,}06) + \Phi(1{,}58) = 0{,}355 + 0{,}443 = 0{,}798$.

Задачі

6.1. Ймовірність появи події в кожному із незалежних випробовувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія настане 60 разів в 144 випробовуваннях.

6.2. Ймовірність появи події у кожному із незалежних випробовувань дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в 100 випробовуваннях подія настане не менше 30 і не більше 40 разів.

6.3. Ймовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 80 разів.
6.4. Знайти ймовірність того, що в партії серед 1000 технічних пристроїв число пристроїв вищого гатунку міститься між 600 і 800, якщо ймовірність того, що пристрій вищого гатунку дорівнює 0,8.
6.5. Ймовірність неточної збірки приладу дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед 1000 приладів буде від 700 до 800 придатних.
6.6. Гральну кістку підкидають 600 разів. Яка ймовірність того, що цифра 1 випаде рівно 60 разів?
6.7. Ймовірність появи події A в кожному із 1000 незалежних дослідів дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться в цих дос-лідах: а) рівно 900 разів; б) не менше 800 і не більше 900 разів.
6.8. Ймовірність видужання хворого за результатами нового методу лікування дорівнює 0,9. Скільки вилікуваних із 200 хворих можливо чекати з ймовірністю 0,8?
6.9. Гральну кістку підкидають 320 разів. Яка ймовірність того, що цифра 4 при цьому випадає не менше 130 і не більше 150 разів?
6.10. Ймовірність того, що пасажир запізниться на поїзд дорівнює 0,01. Знайти найбільш ймовірне число тих, що запізнилися із 700 пасажирів і ймовірність цієї події.
6.11. Гральний кубик підкинули 200 разів. Яка ймовірність того, що цифра 5 з'явиться не більше 50 разів?
6.12. Визначити ймовірність того, що при 600 випробовуваннях подія A настане рівно 100 разів, якщо ймовірність появи події A при кожному випробовуванні дорівнює 0,7.
6.13. Знайти ймовірність того, що з 8 незалежних випробовувань подія A настане не менше ніж три рази, якщо ймовірність появи події A при кожному дослідженні дорівнює 0,8.
6.14. Випадкова величина X нормально розподілена з математичним сподіванням 3 і середнім квадратичним відхиленням 0,5. Яка ймовірність того, що при першому досліді випадкова величина буде на інтервалі (2;5), а при другому – на (2;4)?
6.15. Випадкова величина X нормально розподілена з математичним сподіванням 10. Яким повинно бути середнє квадратичне відхилення, щоб з ймовірністю 0,9 відхилення від математичного сподівання по абсолютній величині не перевищувало 0,1?
6.16. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням 50 і дисперсією 16. Обчислити ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (30;40).

6.17. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 200 народжених буде 100 хлопчиків.
6.18. Схожість насіння даної рослини складає 95%. Знайти ймовірність того, що із 900 посіяних насінин зійде 800.
6.19. При проведенні експерименту із 4096 разів герб випав 2068 разів. З якою ймовірністю можливо було чекати цей результат?
6.20. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробовувань дорівнює 0,5. Яка ймовірність того, що подія відбудеться в 40 випробовуваннях із 100?

7. Закон розподілу та числові характеристики двохмірної випадкової величини.

Функцією розподілу системи двох випадкових величин (X,Y) називається ймовірність сумісного виконання двох нерівностей: $X < x,\ Y < y$: $F(x,y) = P(X < x; Y < y)$. Її властивості: 1. $F(x,y)$ - неспадна функція обох своїх аргументів. 2. $F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$. 3. $F(+\infty,+\infty) = 1$. 4. $F(x,+\infty) = F_1(x) = P\{X < x\}$, $F(+\infty,y) = F_2(y) = P\{Y < y\}$. 5. $F(x,y)$ - неперервна зліва по будь-якому аргументу.

Якщо X,Y - система дискретних випадкових величин і X приймає значення $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y - \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, то ймовірність того, що X прийме значення x_i, а Y - y_j: $p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\}$. Матриця розподілу двох дискретних випадкових величин X,Y має вигляд:

$x_i \setminus y_j$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

Функція розподілу системи (X,Y): $F(x,y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}$. *Закони розподілу* випадкових величин, що входять у систему: $p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, $p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$. *Сумісна щільність розподілу* системи неперервних

випадкових величин X, Y: $f(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y)$. Її властивості: 1. $f(x,y) \geq 0$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)dxdy = 1$. Знаючи сумісну щільність розподілу, можна одержати *функції розподілу аргументів*: $F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$, $F_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$. *Математичне сподівання* дискретних і неперервних випадкових величин визначається, відповідно, виразами: $MX=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i p_{ij}$, $MY=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} y_j p_{ij}$, $MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$, $MY = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$. Точка (MX, MY) називається центром розсіювання системи випадкових величин.. Вирази для дисперсій: $DX=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i-MX)^2 p_{ij}$, $DY=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(y_j-MX)^2 p_{ij}$, $DX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x,y)dxdy$, $DY=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-MY)^2 f(x,y)dxdy$. Для незалежних випадкових величин: $F(x,y)=F_1(x)F_2(x)$, для дискретних незалежних випадкових величин: $p_{ij}=p_{x_i}p_{y_j}$, для неперервних незалежних випадкових величин: $f(x,y)=f_1(x)f_2(x)$.

Коваріацією випадкових величин X, Y називається: $K_{xy}=M(X-m_x)\times$ $\times(Y-M_y)=MXY-MXMY$. *Коефіцієнт кореляції*: $r_{xy}=K_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$.

Приклад 7.1. Є закон розподілу системи випадкових величин (X,Y) дискретного типу, що визначається таблицею. Знайти безумовні закони розподілу окремих компонент X та Y, встановити, чи залежні X і Y.

$X_i \setminus Y_j$	1	2	3
2	0,05	0,3	0,2
3	0,05	0,1	0,3

Розв'язок. Використовуючи формули $p_{x_i}=P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{m}p_{ij}$, $p_{y_j}= = P\{Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{n}p_{ij}$, одержимо закони розподілу:

X	2	3	Y	1	2	3
p	0,55	0,45	p	0,1	0,4	0,5

Визначимо, чи є величини X і Y незалежними. Оскільки для незалежних величин повинна виконуватись рівність $p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}$, а $p_{11} = 0{,}05 \neq p_{x_1} \cdot p_{y_1} = 0{,}55 \cdot 0{,}1 = 0{,}055$, то випадкові величини залежні.

Приклад 7.2. Задана сумісна щільність розподілу випадкових величин X та Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x-y+2), & \text{при } 0<x<2,\ 0<y<2, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}.$$

Визначити константу с та знайти $P\{X+Y<2\}$.

Розв'язок. Константу с знаходимо з умови $\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Тобто

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} c(x-y+2)dxdy = \int_0^2\int_0^2 c(x-y+2)dxdy = c\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - yx + 2x\right)\Big|_0^2 dy = c\int_0^2 (6-2y)dy =$$

$= 8c = 1$. Звідси $c = \frac{1}{8}$. Оскільки ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область D визначається рівністю $P\{(X,Y)\in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy$, то

$$P\{X+Y<2\} = \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^{2-y}(x-y+1)dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - yx + x\right)\Big|_0^{2-y} =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left(\frac{(2-y)^2}{2} - y(2-y) + 2 - y\right)dy = \frac{1}{8}\left(\frac{y^3}{2} - \frac{5}{2}y + 4y\right)\Big|_0^2 = \frac{7}{8}.$$

Задачі

В задачах 7.1-7.5 дано закон розподілу системи випадкових величин (X,Y) дискретного типу визначається таблицею. Знайти безумовні закони розподілу окремих компонент X та Y; встановити, чи залежні X і Y.

7.1.

$X_i \backslash Y_j$	1	2	3	4
2	0,1	0,1	0,2	0,1
3	0,2	0,1	0,1	0,1

7.2.

$X_i \backslash Y_j$	-1	0	1	3
-1	0,01	0,19	0,02	0,18
1	0,2	0,2	0,1	0,1

7.3.

$X_i \backslash Y_j$	3	4	5	6
2	0,11	0,11	0,02	0,06

4	0,2	0,3	0,1	0,1

7.4.

$X_i \backslash\ Y_j$	-3	1	3	4
-2	0,05	0,05	0,15	0,05
3	0,25	0,15	0,15	0,15

7.5.

$X_i \backslash\ Y_j$	10	20	30	40
20	0,3	0,2	0,1	0,05
30	0,05	0,1	0,05	0,15

7.6. Повідомлення може пройти по двом каналам зв'язку. Ймовірність проходження по першому каналу – 0,4, по другому – 0,6. Випадкова величина $X = \begin{cases} 1, \textit{ якщо повідомлення пройшло по першому каналу}, \\ 0, \textit{ в іншому випадку} \end{cases}$, Y визначається аналогічно для другого каналу. Знайти сумісну функцію розподілу випадкових величин X та Y.

7.7. Стріляють два рази по мішені при незмінних умовах. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,5. Випадкові величини: X - число пострілів до першого попадання (включно), Y – число промахів. Описати закон розподілу системи випадкових величин (X,Y). Знайти центр розсіювання даного розподілу (MX, MY) і значення σ_X^2, σ_Y^2.

7.8. В умовах задачі 7.7 обчислити коефіцієнт кореляції.

В задачах 7.9-7.13 задана сумісна щільність розподілу випадкових величин X та Y. Визначити константу c та знайти $P\{X+Y<1\}$.

7.9. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), \textit{ при } 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, \textit{ в інших випадках} \end{cases}$.

7.10. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(xy+y), \textit{ при } 0<x<2,\ 0<y<2, \\ 0, \textit{ в інших випадках} \end{cases}$.

7.11. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+3y), \textit{ при } 0<x<3,\ 0<y<3, \\ 0, \textit{ в інших випадках} \end{cases}$.

7.12. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2), \textit{ при } 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, \textit{ в інших випадках} \end{cases}$.

7.13. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x^2+3y^2), \textit{ при } 0<x<2,\ 0<y<1, \\ 0, \textit{ в інших випадках} \end{cases}$.

7.14. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_X(x)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.1.

7.15. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_Y(y)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.2.

7.16. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_X(x)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.4.
7.17. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_Y(y)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.5.
7.18. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_X(x)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.9.
7.19. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_Y(y)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.11.
7.20. Визначити центр розсіювання і функцію розподілу $F_X(x)$ для системи випадкових величин (X,Y) із задачі 7.12.

8. Емпірична функція розподілу, гістограма та полігон частот, точкові та інтервальні оцінки

Задача

З таблиці в кінці методичних вказівок згідно свого варіанту визначити вибірку X, для якої:
1. Обчислити середнє значення M.
2. Обчислити показники розсіювання значень (мінімальне, максимальне значення, розмах ρ як різницю між найменшим та найбільшим значенням вибірки.
3. Для побудови інтервального варіаційного ряду обчислити:

а) кількість класів за формулою $d = 1 + 3.3\lg n$;

б) ширину класів за формулою $h = \dfrac{\rho}{d}$;

в) початки та кінці класів.

4. Побудувати таблицю варіаційного ряду, включивши в неї:

а) порядкові номери класів;

б) класи (початок і кінець класу);

в) значення варіацій (середнє арифметичне початку та кінця класу);

г) емпіричні частоти;

е) щільності частот.

5. Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.
6. Побудувати гістограму розподілу значень.
7. За формулою Лапласа обчислити вирівнюючі теоретичні частоти значень, для чого:

а) обчислити незміщену оцінку дисперсії: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\left(x_i - M\right)^2$;

б) обчислити $\sigma = \sqrt{S^2}$;

в) обчислити $X_i = \dfrac{W_i - M}{\sigma}$, де W_i - значення варіації;

г) обчислити $f_i = \dfrac{nh}{\sigma} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}$.

8. На загальному графіку побудувати полігони емпіричних та вирівнюючих частот з метою їх порівняння.
9. Для порогу ймовірності безпомилкових прогнозів 0,95 за таблицею Ст'юдента знайти значення критерію надійності прогнозу t_γ.
10. Обчислити точність прогнозу: $m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, абсолютну похибку прогнозу середнього значення $\Delta = m \cdot t_\gamma$
11. За допомогою довірчого інтервалу записати прогноз генерального середнього значення у вигляді $M \pm \Delta$.
12. Зробити висновки про мінімальне та максимальне середнє значення.

<u>*Приклад 8.1.*</u> Нехай дана вибірка X:
44 24 55 76 74 85 6 45 72 28 36 16 13 30 35 8 39 42 53 43 43 43 77 48 46 89 67 98 37 83 18 61 68 88 48 40 64 42 65 21 33 20 43 49 51 44 94 15 35.

Провести її аналіз.

<u>*Розв'язок*</u>.Середнє значення вибірки $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{50}(44+24+...+35) = 47{,}88$.

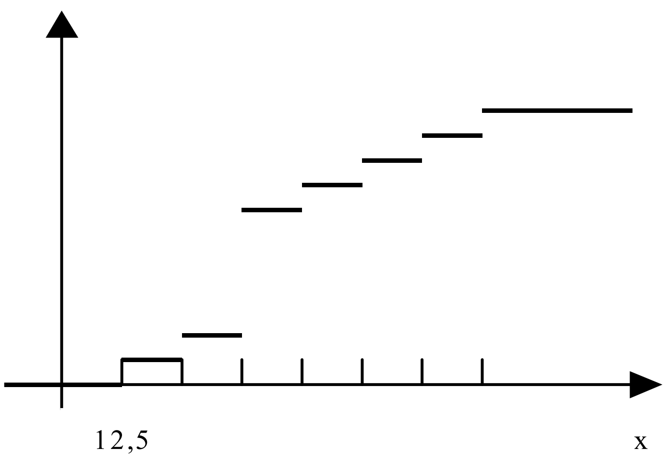
Мінімальне значення вибірки $x_{\min} = 6$, максимальне - $x_{\max} = 98$. Розмах вибірки становить $\rho = x_{\max} - x_{\min} = 98 - 6 = 92$. Кількість класів $d = 1 + 1{,}33\lg(50) \approx 7$. Для того, щоб кінці класів були б цілими числами, необхідно, щоб ширина класу була цілим числом. В зв'язку з цим замінимо елемент вибірки 98 на 97, що не приведе до значної похибки. Маємо: $\rho = 91,\ \ h = 13$. Будуємо таблицю варіаційного ряду (якщо елемент попадає на границю класу, то його відносимо до того класу, в якому він є правою границею).

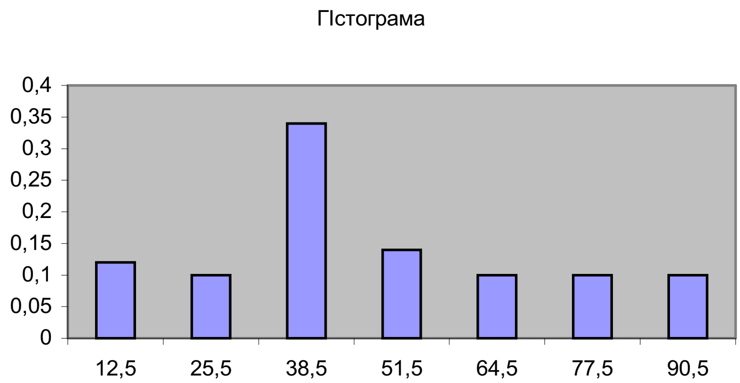
№ класу	Класи	Варіація	Емпіричні частоти	Щільності частот
1	6 …19	12,5	6	0,12
2	19…32	25,5	5	0,1
3	32…45	38,5	17	0,34
4	45…58	51,5	7	0,14
5	58…71	64,5	5	0,1

6	71…84	77,5	5	0,1
7	84…97	90,5	5	0,1

Будуємо емпіричну функцію розподілу і гістограму:

$$^{*}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 12,5, \\ 0,12, & 12,5 < x \le 25,5, \\ 0,22, & 25,5 < x \le 38,5, \\ 0,56, & 38,5 < x \le 51,5, \\ 0,7, & 51,5 < x \le 64,5, \\ 0,8, & 64,5 < x \le 77,5, \\ 0,9, & 77,5 < x \le 90,5, \\ 1, & x > 90,5 \end{cases}$$



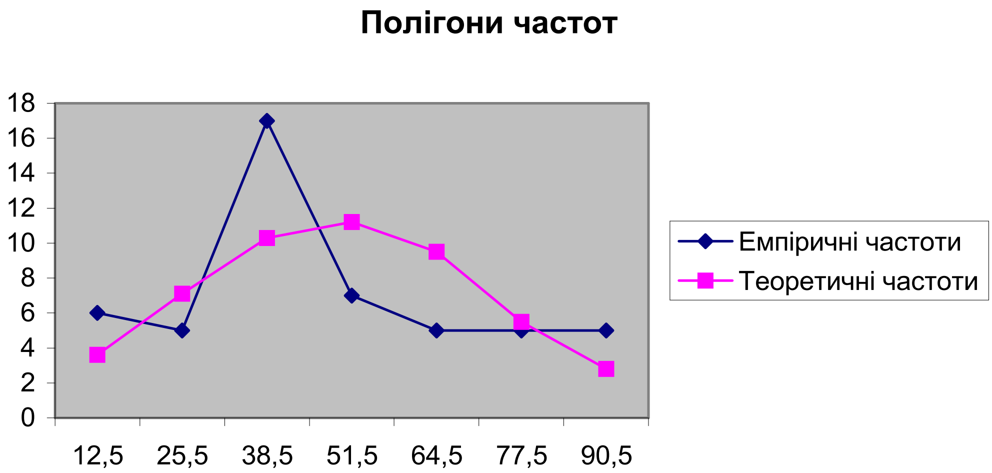


Обчислимо незміщену оцінку дисперсії і оцінку середнього квадратичного відхилення:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - M\right)^2 = \frac{1}{49}(44 + 24 + ... + 35) = 542{,}76, \quad \sigma = \sqrt{542{,}76} = 23{,}3.$$

Далі обчислюємо $X_i = \dfrac{W_i - M}{\sigma}$, де W_i - значення варіації. Маємо: $X_1 = -1.52,\ X_2 = -0.96,\ X_3 = -0.40,\ X_4 = 0.16,\ X_5 = 0.71,\ X_6 = 1.27,\ X_7 = 1.83.$

Обчислюємо теоретичні частоти за формулою $f_i = \dfrac{nh}{\sigma}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}}$. Одержимо: $f_1 = 3.6,\ f_2 = 7.1,\ f_3 = 10.3,\ f_4 = 11.2,\ f_5 = 9.5,\ f_6 = 5.5,\ f_7 = 2{,}8.$



Для порогу ймовірності безпомилкових прогнозів 0,95 за таблицею Ст'юдента знайдемо значення критерію надійності прогнозу $t_\gamma = 2.009$. Знайдемо точність прогнозу: $m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{23,3}{\sqrt{50}} = 3,29$, абсолютну похибку прогнозу середнього значення $\Delta = m \cdot t_\gamma = 3,29 \cdot 2,009 = 6,61$. Прогноз генерального середнього значення має вигляд $M \pm \Delta = 47,88 \pm 6,61$. Таким чином, мінімальне середнє значення – 41,27, максимальне – 54,49.

9. Лінійна кореляція.

При великій кількості спостережень системи випадкових величин (X, Y) одне і те ж значення x може зустрітися n_x раз, одне і те ж значення y - n_y раз, одна і та ж пара (x, y) може спостерігатися n_{xy} раз. Дані групують і записують у вигляді кореляційної таблиці, наприклад:

Y	X				
	2	3	4	5	n_y
1	0	1	2	0	3
2	0	7	5	5	17
3	3	0	0	1	4
4	2	0	5	0	7
n_x	5	8	12	6	N=31

Вибірковий коефіцієнт кореляції визначається рівністю $r_b = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\overline{\sigma_x}\,\overline{\sigma_y}}$, де x і y - значення ознак X та Y; n_{xy}- частота пари (x, y); $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$ - вибіркові середні квадратичні відхилення; $\overline{x}$, $\overline{y}$ - вибіркові середні. Рівняння вибіркового рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд: $\overline{y_x} - \bar{y} = r_b \dfrac{\overline{\sigma_y}}{\sigma_x}(x - \bar{x})$; X на Y - $\overline{x_y} - \bar{x} = r_b \dfrac{\overline{\sigma_x}}{\sigma_y}(y - \bar{y})$.

<u>*Приклад 9.1.*</u> Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці:

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125		1						1
150	1	2	5					8
175		3	2	12				17
200			1	8	7			16
225					3	3		6
250						1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	N=50

Хоча дані кореляційної таблиці рівновіддалені, для розрахунку вибіркового рівняння використаємо загальний метод, не пов'язаний з введенням "хибного" нуля. Знайдемо вибіркові середні: $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum n_x x =$

$= \dfrac{1}{50}(18\cdot 1 + 23\cdot 6 + \ldots + 48\cdot 1) = 32.8$, $\bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum n_y y = \dfrac{1}{50}(125\cdot 1 + 150\cdot 8 + \ldots + 250\cdot 2) = 187.$

Знайдемо допоміжні величини (вибіркові початкові моменти другого порядку): $\overline{\alpha_x^2} = \dfrac{1}{n}\sum n_x x^2 = \dfrac{1}{50}(1\cdot 324 + 6\cdot 529 + \ldots + 1\cdot 2304) = 1113.8$,

$\overline{\alpha_y^2} = \dfrac{1}{n}\sum n_y y^2 = \dfrac{1}{50}(1\cdot 15625 + 6\cdot 22500 + \ldots + 1\cdot 62500) = 35700$.

Знаходимо вибіркові середні квадратичні відхилення:

$\sigma_x = \sqrt{\overline{\alpha_x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{1113.8 - 32.8^2} = 6.16$, $\sigma_y = \sqrt{\overline{\alpha_y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{35700 - 187^2} = 27.04$.

Знаходимо $\sum n_{xy} xy = 1\cdot 23\cdot 125 + 1\cdot 18\cdot 150 + \ldots + 1\cdot 48\cdot 250) = 313675$. Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_b = \dfrac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\overline{\sigma_x}\overline{\sigma_y}} = \dfrac{313675 - 50\cdot 32{,}8\cdot 187}{50\cdot 6{,}16\cdot 27{,}04} = 0.84$.

Рівняння регресії $\overline{y_x} - 187 = 0.84\dfrac{27.04}{6.16}(x - 32.8)$, або спрощуючи та округлюючи $\overline{y_x} = 3.69x + 66$.

Задача

Дана кореляційна таблиця для величин X та Y, де X- вхідний параметр системи, Y-вихідний параметр.

X\Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
X_2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}
X_3	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}
X_4	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}

Визначити коефіцієнт кореляції і рівняння ліній регресії. Дані згідно варіанта в таблиці

вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_1	1	-3	-2	3	-1	3	6	1	2	-8	2	-3	3	7	2
X_2	2	-2	0	4	0	4	7	3	3	-6	3	-1	5	8	3
X_3	3	-1	3	5	1	7	8	5	5	-4	7	2	7	9	4
X_4	4	0	4	6	2	8	9	7	6	-2	8	3	9	10	8
Y_1	3	5	5	7	0	1	-1	2	1	-1	-3	4	1	1	-1
Y_2	4	6	6	8	1	2	2	3	2	0	-2	5	2	2	1
Y_3	6	7	7	9	3	3	3	4	3	1	-1	6	3	3	2
Y_4	7	8	8	10	4	4	4	5	6	2	0	7	4	4	3
A_{11}	0	1	4	0	3	1	2	0	0	4	1	0	3	4	0
A_{12}	1	0	0	0	0	0	3	6	9	2	0	3	5	5	6
A_{13}	2	2	0	0	0	8	0	0	0	2	8	0	0	0	5
A_{14}	8	4	0	1	5	0	0	6	2	3	0	6	4	0	0
A_{21}	0	5	8	0	0	7	2	0	0	0	7	0	5	0	4
A_{22}	3	0	0	1	6	0	5	0	4	0	0	0	0	3	1
A_{23}	0	6	6	2	0	6	8	0	0	0	8	0	0	2	2
A_{24}	0	4	3	0	4	0	0	5	5	4	0	0	8	3	0
A_{31}	5	0	0	3	1	4	0	4	0	0	7	6	7	0	5
A_{32}	0	3	2	0	0	0	9	4	2	5	0	5	4	8	4
A_{33}	4	0	1	4	0	3	5	0	0	6	8	4	0	0	0
A_{34}	2	2	7	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	3	8
A_{41}	0	0	8	4	0	2	4	0	0	0	5	0	1	0	0
A_{42}	2	0	0	5	2	0	0	8	2	0	0	3	4	3	6
A_{43}	0	3	8	6	3	1	5	8	6	0	5	5	0	0	0
A_{44}	6	0	0	7	6	0	0	7	5	7	4	4	0	5	0

10. Перевірка гіпотези про розподіл генеральної сукупності.

На основі дослідів складений статистичний ряд розподілу випадкової величини X:

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

де $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$ - частота події $\{X = x_i\}$, n_i - число дослідів, в яких з'явилась ця подія, $i = \overline{1,k}$. Висувають гіпотезу H, яка полягає в тому, що випадкова величина має ряд розподілу:

X	x_1	x_2	…	x_k
P	p_1	p_2	…	p_k

а відхилення частот p_i^* від ймовірностей p_i пояснюється випадковими причинами. В якості міри розбіжності R між гіпотетичним розподілом та статистичним при використанні критерію χ^2 береться сума квадратів відхилень $R = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - np_i)/(np_i)$. Розподіл χ^2 залежить від параметра r, який називають числом степенів свободи, і який дорівнює числу розрядів k мінус число незалежних умов, що накладені на p_i^*. Якщо обчислене значення χ^2 менше табличного значення χ^2, то підстав для відхилення гіпотези H немає, в протилежному випадку гіпотезу відкидають.

В.І. Романовським запропонований наступний критерій згоди: якщо величина $\left|\chi^2 - r\right| / \sqrt{2r}$ більша, або дорівнює 3, то розбіжність теоретичних і дослідних частот треба вважати не випадковою; якщо вона менше 3, то ця розбіжність випадкова.

<u>*Приклад 10.1.*</u> За даними вибірки побудувати дискретний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ і критерію Романовського визначити правомірність прийнятої гіпотези.

4 1 6 9 9 10 0 4 8 2 3 0 0 2 3 0 3 4 5 4 4 4 9 5 4 3 11 8 12 3 10 0 7 8 11 5 3 7 4 7 1 2 0 4 5 5 4 12 0 3.

<u>*Розв'язок.*</u> Будуємо дискретний варіаційний ряд

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	7	2	3	7	10	5	1	3	3	3	2	2	2

Висуваємо гіпотезу, шо елементи вибірки мають нормальний розподіл і перевіримо її. Знайдемо вибіркове середнє: $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum n_x x = \dfrac{1}{50}(7 \cdot 0 +$

$+2\cdot 1+...+2\cdot 12)=4.76$, вибірковий початковий момент другого порядку: $\overline{\alpha_x^2}=\frac{1}{n}\sum n_x x^2=\frac{1}{50}(7\cdot 0+2\cdot 1+...+2\cdot 144)=34.2$ і середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x=\sqrt{\overline{\alpha_x^2}-(\overline{x})^2}=\sqrt{34.2-4.76^2}=3.4$. Складемо розрахункову таблицю:

I	x_i	$u_i=\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}$	$\varphi(u_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_i^2}{2}}$	$n_i^{'}=\frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i)$
1	0	-1,4	0,15	2,2
2	1	-1,11	0,22	3,2
3	2	-0,81	0,29	4,2
4	3	-0,52	0,35	5,2
5	4	-0,22	0,39	5,7
6	5	0,07	0,40	5,9
7	6	0,36	0,37	6,0
8	7	0,66	0,32	4,7
9	8	0,95	0,25	3,7
10	9	1,25	0,18	2,7
11	10	1,54	0,12	1,8
12	11	1,84	0,07	1,1
13	12	2,13	0,04	0,6

Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти, для чого складемо розрахункову таблицю:

I	n_i	$n_i^{'}$	$n_i-n_i^{'}$	$(n_i-n_i^{'})^2$	$\frac{(n_i-n_i^{'})^2}{n_i^{'}}$
1	7	2,2	4,796	23,00	10,44
2	2	3,2	-1,19	1,41	0,44
3	3	4,2	-1,22	1,50	0,35
4	7	5,2	1,86	3,47	0,68
5	10	5,7	4,27	18,25	3,19
6	5	5,9	-0,86	0,74	0,13
7	1	6,0	-4,49	20,20	3,68
8	3	4,7	-1,73	2,98	0,63
9	3	3,7	-0,73	0,53	0,14
10	3	2,7	0,30	0,09	0,03
11	2	1,8	0,21	0,04	0,02
12	2	1,1	0,91	0,83	0,76
13	2	0,6	1,39	1,94	3,18
$\sum$					23.67

По таблиці критичних точок розподілу χ^2 при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ і числі степенів свободи $k = s - 3 = 13 - 3 = 10$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2(0{,}05:10) = 18{,}3$. Оскільки розраховане значення критерію більше ніж табличне, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності відкидаємо. За критерієм Романовського розходження теоретичних і емпіричних частот теж невипадкове, оскільки частка $\left|\chi^2 - r\right| / \sqrt{2r}$ дорівнює 3,05.

Задача

У задачах 10.1-10.10 за даними вибірки побудувати дискретний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ визначити правомірність прийнятої гіпотези.

10.1.

7	11	5	9	5	4	5	3	5	8	5	3	8	3	11	3	9	6	8	7
3	3	6	2	7	4	4	3	5	7	4	6	5	2	9	5	8	6	1	1
7	7	4	4	9	7	4	3	1	6	6	4	5	5	7	8	6	8	5	4
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6	8	4	5	6	5

10.2

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	4	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	1

10.3.

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2	4
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1	5
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	3	2	5	0	1	3	2	2	3
0	2	2	2	5	4	1	2	2	1	4	5	3	2	1	0	1	2	3	2

10.4.

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	5	2	5	3	6	6
5	5	3	5	6	7	6	8	9	5	2	5	4	5	6	3	6	5	3	4
5	10	3	7	5	3	3	3	7	5	3	4	9	2	7	1	4	4	4	2

10.5.

6	6	5	6	11	8	7	4	4	4	8	3	2	3	9	7	6	9	5	8
8	7	10	8	6	9	9	10	3	10	5	4	6	8	9	9	3	8	4	11
4	6	9	2	8	4	7	7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8
2	3	8	8	7	6	9	4	6	7	6	9	5	6	4	7	8	9	9	8

10.6.

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	1	3	2	1	1	1
0	0	0	1	1	0	2	0	3	1	0	1	1	3	2	1	0	0	1	0
1	1	0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0
2	3	2	1	1	0	4	2	2	1	1	0	2	1	2	0	0	1	2	0

10.7.

4	6	0	2	1	3	3	1	2	5	3	1	2	2	4	4	4	3	2	5
2	5	1	2	3	0	3	0	5	7	2	1	3	0	5	4	0	2	2	1
0	5	1	4	2	2	4	1	3	1	0	6	1	2	1	4	2	2	0	2

10.8.

2	4	1	3	1	2	4	1	3	2	5	4	1	2	4	5	2	4	2	2
4	2	3	2	1	3	2	2	4	3	4	2	3	2	1	4	3	2	3	4
4	3	4	4	3	0	1	2	5	3	2	4	3	2	0	2	3	2	4	2
4	3	2	1	3	4	3	5	1	3	2	4	3	4	2	3	3	4	3	2

10.9.

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	4	6	4	4	3	4	1	5
5	3	4	3	7	4	5	6	7	5	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4

10.10.

3	5	6	8	4	5	4	7	7	2	7	7	3	4	7	4	5	4	4	5
2	4	8	8	4	6	5	9	4	0	4	4	4	9	3	3	2	1	5	2
5	5	3	4	4	7	8	9	11	4	5	2	5	7	6	1	2	5	5	6
3	1	2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5	2	8	3

У задачах 10.11-10.20 за даними вибірки побудувати неперервний варіаційний ряд, висунути гіпотезу про закон розподілу і на підставі критерію згоди Пірсона χ^2 при значенні $\alpha = 0{,}05$ визначити правомірність прийнятої гіпотези.

10.11.

19,5	20	22,5	20	22	21	20,4	21,5	21,3	22,1	21,4	21,4
22,1	21,5	21	20,2	19	24,8	21,5	23	20,8	20,2	21	21,2
20,4	21	25,5	25,2	25,5	20	19	21,6	20,5	24	21,3	23,5
21,6	21,7	25	23	23,4	21,3	22	22,3	22,5	24,3	25,6	21,5

10.12.

9,5	10	10	9,9	10	9,9	9,	10	10,3	10	10	9,6
9,8	10	9,8	9,6	10,1	10	10	10	9,9	10,2	9,7	10
10,3	9,7	10	10,3	10,5	10,1	10	10,4	10,2	10,2	10,6	9,8
9,6	10,2	10,3	10	10	9,5	9,9	9,8	10,5	10,4	9,5	9,6

10.13.

10	10.2	9,2	9.8	10	10.3	10	9.8	9.9	9.8	10	10.4	10.2
10	10.3	10	10	9.8	10	9.7	10	10	10	10	10.3	10.5
10	10.1	10	9.8	10.0	9.8	9.5	9.6	10.2	9.8	9.5	9.6	9.6
9.8	10.2	10	10	10.2	10.3	10.4	10	10	9.9	9.8	9.8	9.8

10.14.

22.4	20	19.7	19.6	18	21.3	21.5	21	23.5	23	20.3	20.5
25	20	22.3	21	19.6	21.9	24	19.8	23	23.5	21.5	24
22.7	21	21.3	21.3	20.5	24	23.2	20.1	20.1	20.7	21.5	23.5
19.5	20	20	21	21	23	25	20.5	21.5	21.5	23.5	24.5

10.15.

24	20	21.5	23.5	20.5	20	19.6	22.5	21	19.5	22.5	20
19.5	21	26	21	22.3	22	20.5	22.6	20.7	22.2	19.5	23
23.6	20.6	23.7	22.1	21.5	22.6	21	19.5	20.6	23.5	20	22
21.5	20	21	24	20.5	21.5	20	23.4	21.5	23.6	21.4	23

10.16.

13	28.2	24.1	14.9	22.4	23.9	18.8	17.6	14.0	13.1	23.8	17.6
24	24.8	23.3	26.0	14.1	14.6	18.2	27.6	24.2	13.8	25.6	13.8
17	16.4	17.8	16.4	27.7	31.1	22.9	17.1	21.7	27.7	30.5	19.2
15	17.8	17.5	18.6	17.3	19.1	12.8	12.8	27	24	17.8	22.1

10.17.

13	20.5	19.7	21	21.8	21.9	20.6	7.4	25	14	17.4	15.2
20	22.5	22.6	25.8	17.2	14.1	15.3	19.0	22.7	24.8	26.6	24.2
21	21	19.4	26.6	13.6	14.4	27.5	13.5	21.4	18.9	18.1	24.7
14	12.2	16.7	8.4	18.0	22.7	22.6	19.3	23.3	20.4	22.4	16.7

10.18.

17.7	21.5	12	23	19.4	20.4	19	20.4	19	13.1	20.8	30.1
18.2	22.7	22.8	15	12.8	28.6	22.1	19.9	21.8	17.2	19.8	24.2
20.5	14.6	15.9	26	17.1	23.7	24.3	20.1	19.1	22.8	25.8	18.8
22.3	16.9	23.4	17	13.2	14.1	17	21.7	23.5	15.6	22.7	21.4

10.19.

10	15	15	9	10	10	10	8	9	8	8	10	8	7	15
11	8	7	15	7	13	11	16	4	8	12	11	8	16	12
17	12	7	8	12	6	13	17	9	12	6	6	9	7	15
14	12	8	7	7	10	8	13	8	1	12	13	17	18	10

10.20.

11	11	15	9	10	12	13	11	10	7	15	10	12	4	15
7	6	11	12	12	10	9	4	10	14	17	7	13	8	12
12	9	12	9	11	15	8	12	10	7	12	8	17	14	8
2	12	12	10	12	7	9	7	8	5	15	9	8	7	9

Програма курсу
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Вступ. Історичний розвиток теорії ймовірностей. Задачі, для розв'язку яких необхідно застосовувати ймовірностні методи. Використання методів теорії ймовірностей для вивчення засобів обчислювальної техніки.

Основні положення теорії ймовірностей. Випадкова подія, достовірна та неможлива подія, протилежна подія, повна група подій, несумісні події. Класична формула ймовірності, елементи комбінаторики (перестановки, розміщення та сполучення). Аксіоматичне визначення ймовірності. Ймовірність протилежної події.Геометричні ймовірності, задача Бюффона.

Теореми додавання та множення ймовірностей. Теорема додавання ймовірностей. Умовна ймовірність події, теорема множення ймовірностей. Композиція дослідів. Поняття ентропії як міри невизначеності. Елементи математичної теорії зв'язку.

Формула повної ймовірності та формула Байєса. Формула повної ймовірності. Апріорні та апостріорні ймовірності, теорема гіпотез (формула Байеса).

Випадкові величини. Поняття випадкової величини, приклади. Закони розподілу випадкових величин. Ряди розподілу, многокутник розподілу, функція розподілу випадкової величини, її властивості. Ймовірність попадання на відрізок, ймовірність окремого значення. Функція розподілу дискретної величини, індикатор події. Неперервна випадкова величина, щільність розподілу. Змішані випадкові величини. Алгоритми генерації випадкових чисел.

Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання дискретної та неперервної випадкової величини, мода та медіана. Моменти, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Асиметрія та ексцес. Властивості числових характеристик. Твірна функція випадкової величини. Надійність елементів системи при змінному часі роботи.

Неперервні та дискретні розподіли. Біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, потік подій, геометричний та гіпергеометричний розподіли. Рівномірний розподіл, показниковий розподіл, нормальний розподіл

Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Нормальний розподіл як наближення біноміального. Теорема Бернуллі, локальна та інтегральна теореми Лапласа

Закон великих чисел. Теореми Чебишева, Маркова, Бернуллі, центральна гранична теорема

Системи випадкових величин. Закон розподілу двух дискретних випадкових величин, функція розподілу, її властивості. Щільність розподілу не-

перервної двовимірної випадкової величини, її властивості. Умовні закони розподілу складових випадкових величин. Числові характеристики.
Основні поняття математичної статистики. Предмет і задачі математичної статистики. Емпірична функція розподілу, варіаційний ряд, гістограма, полігон частот.
Оцінки числових характеристик випадкових величиною. Точкові оцінки. Інтервальні оцінки. Оцінка ймовірності за частотою
Перевірка статистичних гіпотез. Критерій згоди. Перевірка гіпотези про розподіл генеральної сукупності.
Лінійна кореляція. Регресія.
Т**еорія ймовірностей і теорія нечітких множин.**

ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1987 г.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975 г.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988 г.
4. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991 г.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Том 2. – М.: Высшая школа, 1986 г.
6. Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1990 г.
7. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). – М.:Наука, 1969 г.
8. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. - М.:Высшая школа, 1989 г.

Таблиця для 8 теми

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
440	607	665	299	341	740	860	103	675	365	360	637	638	661	344
244	487	460	326	1014	882	496	700	157	65	611	625	599	791	300
549	595	523	169	582	607	435	502	121	448	686	620	301	569	269
755	439	542	466	641	680	585	304	130	825	304	549	721	362	32
740	319	490	460	407	333	505	114	531	505	765	74	241	459	260
847	954	512	510	273	471	617	154	552	446	478	476	633	641	634

63	610	459	210	483	417	555	376	433	730	640	314	204	130	661
453	387	484	343	825	706	555	160	537	43	569	219	724	331	741
719	438	310	682	342	163	479	203	463	499	383	274	796	569	412
283	1153	708	265	332	675	427	382	139	158	324	336	552	424	248
362	704	763	672	563	440	680	368	483	668	479	381	676	261	125
162	490	525	624	502	653	852	590	554	487	525	622	561	550	402
131	578	465	361	120	561	488	442	663	656	437	325	202	651	426
304	557	301	551	544	435	166	648	331	726	613	472	159	158	694
345	608	817	40	265	608	552	362	345	113	447	933	686	413	371
76	689	767	432	544	308	644	727	517	465	406	393	718	348	705
386	655	702	857	459	333	431	518	591	601	969	521	554	581	560
419	731	594	460	471	762	251	404	723	606	245	683	412	458	679
527	491	410	230	587	591	428	850	406	257	518	660	325	398	729
427	343	321	278	195	423	414	579	642	559	432	481	389	535	624
435	327	809	692	374	966	337	479	802	393	533	353	269	307	556
426	615	158	685	316	623	610	566	631	989	579	468	348	313	465
769	384	215	431	423	172	677	301	406	368	535	260	572	420	581
769	384	215	431	423	172	677	301	406	368	535	260	572	420	581
463	371	622	384	622	449	519	604	322	301	498	920	870	133	665
397	589	343	509	800	491	931	391	407	260	574	542	631	472	480
894	166	626	307	438	690	721	762	339	540	674	374	456	574	361
673	623	308	353	9	175	452	447	608	583	354	595	430	554	331
975	680	550	337	406	807	343	784	256	267	491	674	395	812	855
369	840	505	579	55	203	143	727	552	618	725	490	588	163	581
832	481	490	205	717	477	580	421	427	287	585	372	751	557	514
178	413	171	463	534	142	527	620	705	328	673	337	176	295	708
608	526	576	461	241	422	281	421	385	581	262	835	157	579	312
680	773	303	208	727	756	469	337	347	361	513	249	400	640	511
884	630	495	343	10	393	340	968	374	553	273	519	463	329	463
483	206	54	102	144	794	722	483	379	520	637	763	823	457	602
395	470	300	687	614	293	471	388	329	157	415	398	451	394	861
635	428	527	459	574	727	335	454	35	80	489	543	537	244	417
424	630	471	276	578	668	573	670	122	777	261	717	323	579	799
652	108	187	529	611	496	186	391	478	449	406	519	358	585	621
211	717	426	842	457	366	448	477	567	852	762	783	242	473	821
331	705	531	258	642	306	674	556	501	267	449	347	760	597	905
196	362	531	793	510	343	351	246	766	103	279	443	536	570	682
427	893	493	199	698	218	600	551	511	246	718	818	258	965	898
494	525	243	218	581	650	540	293	110	601	557	711	894	327	489

506	457	238	622	602	442	356	987	478	448	728	584	171	575	503
435	740	271	399	280	408	432	556	765	629	291	383	828	76	805
939	392	762	610	518	243	117	813	251	304	739	690	211	474	365
152	210	592	477	517	642	514	127	45	536	382	760	298	697	534
353	676	428	664	421	192	574	250	749	628	798	366	372	325	278
13	536	691	372	651	127	627	549	663	408	164	649	360	430	496
790	383	677	373	523	682	104	366	836	138	355	325	726	382	781
244	827	421	840	559	785	521	550	617	693	390	485	434	427	565
369	636	704	529	261	179	566	155	596	279	251	237	758	669	516
652	707	785	761	437	392	558	495	462	292	573	243	321	475	345
593	615	672	390	266	368	307	548	509	704	636	299	404	863	116
675	219	655	602	454	190	623	187	314	522	664	307	572	412	388
619	359	553	644	323	751	576	486	361	520	498	725	133	267	170
226	213	505	392	682	350	623	771	703	452	545	328	609	628	713
277	840	389	376	703	482	502	631	429	446	288	513	643	480	498
639	586	240	666	145	418	148	618	296	629	314	410	853	467	735
565	480	686	790	186	542	560	218	406	200	747	776	987	177	725
312	702	822	609	476	682	550	487	950	546	269	527	415	336	678
452	373	808	454	565	942	316	429	559	314	435	654	518	386	622
526	358	538	102	433	213	417	545	825	474	168	210	289	342	656
612	396	365	319	702	736	357	464	479	529	495	560	493	237	558
528	524	608	344	406	325	593	402	475	799	172	327	62	476	485
318	646	602	517	602	632	572	190	399	640	406	714	229	719	432
877	892	657	331	311	298	388	378	512	624	419	283	488	368	368
597	122	486	346	440	569	151	665	270	166	351	573	369	479	476
514	496	574	121	814	636	415	610	344	258	725	216	373	485	873
666	635	553	609	695	310	446	282	674	349	172	490	303	678	500
672	843	346	590	508	670	238	808	385	473	598	98	414	451	803
373	283	554	416	602	290	628	234	196	306	378	127	679	100	355
315	481	217	472	253	334	826	632	631	327	474	837	185	23	847
722	531	357	846	592	697	377	366	340	122	452	383	637	500	250
260	514	293	126	133	656	701	452	202	674	623	606	476	355	580
188	777	460	280	659	288	710	632	735	54	585	607	406	475	593
642	291	519	740	520	645	264	438	400	296	297	899	434	764	284
628	858	42	705	398	442	473	687	755	56	357	522	280	572	100
941	446	657	564	354	643	520	129	543	501	528	520	831	438	618
789	639	454	766	439	428	335	518	454	479	621	443	220	249	293
761	418	583	713	722	527	424	694	155	823	700	158	632	416	208
523	310	304	313	860	104	98	484	224	688	200	707	631	345	170

500	571	481	540	490	806	524	555	746	459	705	510	681	741	411
591	628	721	358	528	372	368	584	740	566	306	506	642	390	180
495	400	223	391	666	505	284	639	513	488	556	356	695	415	246
289	429	598	552	302	438	450	318	563	602	465	423	327	507	142
145	394	23	127	701	547	517	708	230	616	873	495	881	385	359
666	512	498	696	722	894	712	410	482	364	486	236	657	721	440
589	356	647	297	773	649	693	934	445	452	630	384	396	518	713
624	844	908	484	782	911	387	567	720	516	612	62	342	500	647
543	586	697	680	461	658	564	602	782	431	551	539	550	484	470
295	227	532	302	824	769	468	449	230	609	566	296	938	273	469
748	310	582	607	895	787	350	442	672	337	612	469	884	516	319
438	467	506	542	500	306	526	390	676	490	618	551	657	465	763
332	858	310	325	431	632	758	87	437	657	245	447	726	266	703
336	397	286	697	285	274	286	721	383	608	578	597	170	361	388
414	421	190	428	289	108	369	569	363	423	594	615	600	624	837
409	863	390	393	409	595	664	607	450	821	698	567	350	710	307